

## Práctica 2: Series

1. Estudie la convergencia de las siguientes series:

$$\begin{array}{lll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}; & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}; & g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}; \\
 b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}; & e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}; & h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}; \\
 c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}; & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}; & i) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n).
 \end{array}$$

2. Encuentre la suma de las siguientes series:

$$\begin{array}{lll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}; & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}. \\
 b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; & &
 \end{array}$$

3. Sume la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$ .

Sugerencia: Descomponer el término general en la forma  $\frac{3n^2-4n+2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$ .

4. Para cada serie, determinar cuántos términos es necesario sumar para obtener un resultado que difiera en menos de  $10^{-6}$  de la suma total:

$$\begin{array}{lll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}; & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}; & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.
 \end{array}$$

5. ¿Es cierto que si las series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$  divergen entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} a_k b_k$  también diverge?

6. \* Pruebe que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

y usando esto, que la sucesión con término general

$$r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

converge. El límite de esta sucesión es la *constante de Euler-Mascheroni* y es igual a

$$0,57721566490153286060651209008240243104215933593992\dots$$

Sugerencia: Recurde la demostración del criterio de comparación con una integral impropia.

7. *Criterio de Raabe.* Sea  $(a_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de términos positivos, y notemos

$$\alpha_n = n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

- a) Si  $\alpha_n > 1$  para  $n \gg 1$  entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.  
 b) Si  $\alpha_n < 1$  para  $n \gg 1$  entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

Sugerencia: Analizar el comportamiento de la sucesión  $na_n$  para  $n \gg 1$ .

8. \**Teorema de Abel.* Si  $(a_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión decreciente de términos positivos tal que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ .

Sugerencia: Utilice que  $na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}$  para probar que  $(2n)a_{2n} \rightarrow 0$ , y haga un razonamiento análogo para probar que  $(2n+1)a_{2n+1} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

9. \**Criterio de condensación de Cauchy.* Si  $(a_n)_{n \geq 1}$  es una sucesión decreciente de números no negativos, entonces las series  $\sum_{n \geq 1} a_n$  y  $\sum_{n \geq 1} 2^n a_{2^n}$  convergen o divergen simultáneamente.

10. Decida si las siguientes series convergen absoluta o condicionalmente.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$ ;      b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ ;      c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 2n - 1}{n!}$ .

11. a) Probar que si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge absolutamente, entonces la serie  $\sum a_n^2$  converge. ¿Puede obtenerse la misma conclusión si sólo se supone que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge condicionalmente?

b) ¿Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge y tiene todos sus términos no negativos, se puede concluir algo sobre la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ ?

12. Probar que si  $|\alpha| < 1$  entonces  $\frac{1}{(1-\alpha)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{k-1}$ .

13. Determine para qué valores de  $x$  convergen las siguientes series:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ ;      c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$ ;      e)  $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$ ;  
 b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$ ;      d)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$ ;      f)  $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$ .