

## Práctica 1: Números reales y sucesiones

1. A partir de los axiomas de cuerpo demostrar las siguientes propiedades cualesquiera sean  $a, b, c$  y  $d$  en  $\mathbb{R}$ :

- a)  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ .
- b) Si  $ab = ac$  y  $a \neq 0$  entonces  $b = c$ .
- c) Si  $ab = 0$  entonces  $a = 0$  o  $b = 0$ .
- d)  $(-a)b = -(ab)$  y  $(-a)(-b) = ab$ .
- e) Si  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$ , entonces  $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$ .

2. A partir de los axiomas de cuerpo ordenado probar las siguientes propiedades cualesquiera sean  $a, b$  y  $c$  en  $\mathbb{R}$ :

- a) Si  $a < b$  y  $c > 0$ , entonces  $ac < bc$ .
- b) Si  $a < b$  entonces  $-b < -a$ .
- c) Si  $a \neq 0$  entonces  $a^2 > 0$ .
- d) Si  $ab > 0$  entonces  $a$  y  $b$  son ambos positivos o ambos negativos.
- e) Si  $a^2 + b^2 = 0$ , entonces se tiene que  $a = b = 0$ .
- f) Si  $a \leq b$  y  $b \leq a$  entonces  $a = b$ .

3. Sea  $A$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$  y sea  $s \in \mathbb{R}$ . Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- a)  $s$  es el supremo de  $A$ .
- b)  $s$  satisface las siguientes dos condiciones:
  - para todo  $a \in A$  se tiene  $s \geq a$ ;
  - si  $t \geq a$  para todo  $a \in A$ , entonces  $t \geq s$ .
- c)  $s$  satisface las siguientes dos condiciones:
  - para todo  $a \in A$  se tiene que  $s \geq a$ ;
  - para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $a \in A$  tal que  $s - \varepsilon < a$ .
- d)  $s$  satisface las siguientes dos condiciones:
  - para todo  $a \in A$  se tiene que  $s \geq a$ ;
  - existe una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  contenida en  $A$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$ .

Enuncie caracterizaciones análogas para el ínfimo de  $A$ , y demuestre su equivalencia.

4. Sean  $A$  y  $B \subseteq \mathbb{R}$ , dos conjuntos no vacíos, tales que  $A \subseteq B$ .

- a) Supongamos que  $A$  y  $B$  están acotados superior e inferiormente. Establezca y demuestre las relaciones de orden que hay entre los números  $\sup(A)$ ,  $\inf(A)$ ,  $\sup(B)$  e  $\inf(B)$ .
- b) ¿Qué sucede cuando alguno de los conjuntos no está acotado superior o inferiormente?
5. Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}$ :

- a)  $A_1 = (a, b]$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- b)  $A_2 = \left\{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ .
- c)  $A_3 = A_2 \cup \{0\}$ .
- d)  $A_4 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$ .
- e)  $A_5 = \{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$ .
- f)  $A_6 = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$ .
- g)  $A_7 = \{x^2 - 5x + 4 : x \in [2, 4]\}$ .
- h)  $A_8 = \emptyset$ .

6. Si  $A \subset \mathbb{R}$  es no vacío, para cada  $c \in \mathbb{R}$  consideramos los conjuntos

$$c \cdot A = \{cx : x \in A\}, \quad -A = (-1) \cdot A.$$

Pruebe las siguientes afirmaciones.

- a) Si el conjunto  $A$  está acotado superiormente, entonces  $-A$  está acotado inferiormente e  $\inf(-A) = -\sup A$ .
- b) Si  $c > 0$  y el conjunto  $A$  está acotado superiormente, entonces  $c \cdot A$  también lo está y  $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ .
- c) ¿Qué se puede decir cuando  $c < 0$ ?
- d) Enunciar resultados análogos a los anteriores para  $\inf(c \cdot A)$  (y demuestre alguno(s) si tiene ganas).
7. Si  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  son ambos no vacíos, consideramos los conjuntos

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

- a) ¿Qué condiciones deben satisfacer  $A$  y  $B$  para que exista  $\sup(A + B)$ ? Cuando se cumplen, ¿qué relación hay entre  $\sup(A + B)$  y  $\sup(A) + \sup(B)$ ?
- b) Realice el mismo análisis para el conjunto  $A \cdot B$  y los números  $\sup(A \cdot B)$  y  $\sup(A) \cdot \sup(B)$ .
8. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ . Probar las siguientes afirmaciones.

- a) Existe un único entero  $n$  tal que  $n \leq a < n + 1$ . Llamamos a  $n$  la *parte entera* de  $a$  y lo denotamos  $[a]$ .
- b) Existe  $q \in \mathbb{Q}$  tal que  $a < q < b$ .
- c) Para cada  $x \in \mathbb{R}$  existe una sucesión  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\mathbb{Q}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$ . Más aún,  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  puede elegirse decreciente.

A raíz de este hecho decimos que  $\mathbb{Q}$  es *denso* en  $\mathbb{R}$ .

- 9. Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de números positivos tal que  $\lim a_n = A$ , entonces se tiene que  $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$ .
- 10. Sea  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida recursivamente de la siguiente manera:  $b_0 = \sqrt{2}$  y  $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$  para cada  $n \geq 0$ . Muestre que  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es monótona y que está acotada superiormente por 2. Determine su límite.
- 11. Fijemos  $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$  tales que  $x_1 > y_1 > 0$  y para cada  $n \geq 0$  sean

$$x_{n+1} = (x_n + y_n)/2, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}.$$

Pruebe que para todo  $n \in \mathbb{N}$  vale que

$$y_n < y_{n+1} < x_1, \quad y_1 < x_{n+1} < x_n \quad \text{y} \quad 0 < x_{n+1} - y_{n+1} < (x_1 - y_1)/2^n.$$

Deduzca que ambas sucesiones convergen y que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

- 12. Hallar los puntos límites y los límites superior e inferior de las siguientes sucesiones:
  - a)  $1 - \frac{1}{n}$ ,
  - b)  $(-1)^n$ ,
  - c)  $\cos \frac{n\pi}{2}$ ,
  - d)  $(-1)^n (2 + \frac{3}{n})$ ,
  - e)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots$ ,
  - f)  $\frac{1}{n} (n + (-1)^n (2n + 1))$ .

- 13. Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  son sucesiones acotadas de números reales, determine las relaciones de orden entre los siguientes cuatro números:

$$\begin{array}{ll} \liminf(a_n + b_n), & \limsup(a_n + b_n), \\ \limsup a_n + \limsup b_n, & \liminf a_n + \liminf b_n. \end{array}$$

- 14. a) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de términos positivos tal que

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta < 1.$$

Probar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

- b) Usando este resultado, muestre que

- 1) Si  $\alpha > 0$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha^n/n!) = 0$ .
- 2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n!/n^n = 0$ .
- 3) Si  $0 < \alpha < 1$  y  $k$  es un entero, entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k \alpha^n = 0$ .
15. Sean  $x_1, a \in \mathbb{R}$  tales que  $x_1 > 0$  y  $a > x_1^2 + x_1$ , y para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $x_{n+1} = a/(1 + x_n)$ .
- a) Probar que  $x_{2n-1} < x_{2n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- b) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  notamos por  $I_n$  al intervalo  $[x_{2n-1}, x_{2n}] \subset \mathbb{R}$ . Probar que  $I_{n+1} \subset I_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- c) Probar que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\xi\}$ , donde  $\xi \in \mathbb{R}$  es una raíz de la ecuación  $x^2 + x - a$ .

Sugerencia: Muestre que para todo  $n \in \mathbb{N}$  los números  $x_{n+1} - x_n$  y  $x_n - x_{n-1}$  tienen signos diferentes y que existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que  $|x_{n+1} - x_n| \leq \theta |x_n - x_{n-1}|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

16. Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión acotada superiormente. Probar que  $M \in \mathbb{R}$  es el límite superior de esta sucesión si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$
- existen infinitos  $n \in \mathbb{N}$  para los que  $a_n > M - \varepsilon$ , y
  - existe solamente una cantidad finita de  $n \in \mathbb{N}$  para los que  $a_n > M + \varepsilon$ .
17. Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .
- a) Probar que si  $r < L$  entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n > r$  para todo  $n \geq n_0$ .
- b) Análogamente, si  $r > L$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n < r$  para todo  $n \geq n_0$ .
- c) ¿Puede reformularse (a) si se sabe solamente que  $r \leq L$ ?
- d) ¿Qué puede decirse de  $L$  si existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n > r$  para todo  $n \geq n_0$ ?
18. \* Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales y sea  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión dada por

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Decida si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.
- 1) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ .
- 2) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
- 3) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = L$ .
- b) ¿Puede suceder que  $\limsup a_n = \infty$  mientras que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ ?

c) Pruebe que si  $b_n = a_{n+1} - a_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = L$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = 0$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ .

Sugerencia: Muestre que  $a_n - \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} kb_k$ .

19. \* Sea  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de intervalos cerrados tales que  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$ ; para cada  $n \in \mathbb{N}$  notamos por  $\lambda_n$  la longitud de  $I_n$ . Mostrar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n$  existe y que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n > 0$  entonces  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$  es un intervalo cerrado de longitud  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n$ .