Práctica 1: Números reales y sucesiones

1. A partir de los axiomas de cuerpo demostrar las siguientes propiedades cualesquiera sean a, b, c y d en $\mathbb{R}$:

   a) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

   b) Si $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$.

   c) Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

   d) $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$.

   e) Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$.

2. A partir de los axiomas de cuerpo ordenado probar las siguientes propiedades cualesquiera sean a, b y c en $\mathbb{R}$:

   a) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

   b) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.

   c) Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.

   d) Si $ab > 0$ entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.

   e) Si $a^2 + b^2 = 0$, entonces se tiene que $a = b = 0$.

   f) Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

3. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y sea $s \in \mathbb{R}$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

   a) s es el supremo de A.

   b) s satisface las siguientes dos condiciones:

      - para todo $a \in A$ se tiene $s \geq a$;
      - si $t \geq a$ para todo $a \in A$, entonces $t \geq s$.

   c) s satisface las siguientes dos condiciones:

      - para todo $a \in A$ se tiene que $s \geq a$;
      - para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a$.

   d) s satisface las siguientes dos condiciones:

      - para todo $a \in A$ se tiene que $s \geq a$;
      - existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida A tal que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = s$.

   Enuncie caracterizaciones análogas para el ínfimo de A, y demuestre su equivalencia.

4. Sean A y $B \subseteq \mathbb{R}$, dos conjuntos no vacíos, tales que $A \subseteq B$.

a) Supongamos que A y B están acotados superior e inferiormente. Establezca y demuestre las relaciones de orden que hay entre los números $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$ e $\inf(B)$.

b) ¿Qué sucede cuando alguno de los conjuntos no está acotado superior o inferiormente?

5. Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

   a) $A_1 = (a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

   b) $A_2 = \left\{ \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

   c) $A_3 = A_2 \cup \{0\}$.

   d) $A_4 = \left\{ x \in \mathbb{Q}\ : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \right\}$.

   e) $A_5 = \left\{ x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R} \right\}$.

   f) $A_6 = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

   g) $A_7 = \left\{ x^2 - 5x + 4 : x \in [2, 4) \right\}$.

   h) $A_8 = \emptyset$.

6. Si $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío, para cada $c \in \mathbb{R}$ consideramos los conjuntos

$$c \cdot A = \{cx : x \in A\}, \qquad -A = (-1) \cdot A.$$

   Pruebe las siguientes afirmaciones.

   a) Si el conjunto A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente e $\inf(-A) = -\sup A$.

   b) Si $c > 0$ y el conjunto A está acotado superiormente, entonces $c \cdot A$ también lo está y $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$.

   c) ¿Qué se puede decir cuando $c < 0$?

   d) Enunciar resultados análogos a los anteriores para $\inf(c.A)$ (y demuestre alguno(s) si tiene ganas).

7. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son ambos no vacíos, consideramos los conjuntos

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \qquad A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

   a) ¿Qué condiciones deben satisfacer A y B para que exista $\sup(A + B)$? Cuando se cumplen, ¿qué relación hay entre $\sup(A + B)$ y $\sup(A) + \sup(B)$?

   b) Realice el mismo análisis para el conjunto $A \cdot B$ y los números $\sup(A \cdot B)$ y $\sup(A) \cdot \sup(B)$.

8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Probar las siguientes afirmaciones.

a) Existe un único entero n tal que $n \leq a < n+1$. Llamamos a n la *parte entera* de a y lo denotamos $[a]$.

b) Existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.

c) Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n\to\infty} q_n = x$. Más aún, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede elegirse decreciente.

A raíz de este hecho decimos que $\mathbb{Q}$ es *denso* en $\mathbb{R}$.

9. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números positivos tal que $\lim a_n = A$, entonces se tiene que $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

10. Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente de la siguiente manera: $b_0 = \sqrt{2}$ y $b_{n+1} = \sqrt{2+b_n}$ para cada $n \geq 0$. Muestre que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona y que está acotada superiormente por 2. Determine su límite.

11. Fijemos $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 > y_1 > 0$ y para cada $n \geq 0$ sean

$$x_{n+1} = (x_n + y_n)/2, \qquad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}.$$

Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$y_n < y_{n+1} < x_1, \qquad y_1 < x_{n+1} < x_n \quad \text{y} \qquad 0 < x_{n+1} - y_{n+1} < (x_1 - y_1)/2^n.$$

Deduzca que ambas sucesiones convergen y que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

12. Hallar los puntos límites y los límites superior e inferior de las siguientes sucesiones:

a) $1 - \frac{1}{n}$,

b) $(-1)^n$,

c) $\cos \frac{n\pi}{2}$,

d) $(-1)^n(2 + \frac{3}{n})$,

e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \ldots,$

f) $\frac{1}{n}(n + (-1)^n(2n+1))$.

13. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones acotadas de números reales, determine las relaciones de orden entre los siguientes cuatro números:

$$\liminf(a_n + b_n), \qquad \limsup(a_n + b_n),$$
$$\limsup a_n + \limsup b_n, \qquad \liminf a_n + \liminf b_n.$$

14. *a*) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos tal que

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \theta < 1.$$

Probar que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

b) Usando este resultado, muestre que

1) Si $\alpha > 0$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha^n/n!) = 0$.
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} n!/n^n = 0$.
3) Si $0 < \alpha < 1$ y k es un entero, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k\alpha^n = 0$.

15. Sean x_1, $a \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 > 0$ y $a > x_1^2 + x_1$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_{n+1} = a/(1 + x_n)$.

    a) Probar que $x_{2n-1} < x_{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
    b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ notamos por I_n al intervalo $[x_{2n-1}, x_{2n}] \subset \mathbb{R}$. Probar que $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
    c) Probar que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\xi\}$, donde $\xi \in \mathbb{R}$ es una raíz de la ecuación $x^2 + x - a$.

    Sugerencia: Muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ los números $x_{n+1} - x_n$ y $x_n - x_{n-1}$ tienen signos diferentes y que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $|x_{n+1} - x_n| \leq \theta\,|x_n - x_{n-1}|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

16. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada superiormente. Probar que $M \in \mathbb{R}$ es el límite superior de esta sucesión si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$

    - existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ para los que $a_n > M - \varepsilon$, y
    - existe solamente una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$ para los que $a_n > M + \varepsilon$.

17. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

    a) Probar que si $r < L$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r$ para todo $n \geq n_0$.
    b) Análogamente, si $r > L$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r$ para todo $n \geq n_0$.
    c) ¿Puede reformularse (a) si se sabe solamente que $r \leq L$?
    d) ¿Qué puede decirse de L si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r$ para todo $n \geq n_0$?

18. * Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y sea $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

    para cada $n \in \mathbb{N}$.

    a) Decida si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.
        1) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.
        2) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
        3) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = L$.
    b) ¿Puede suceder que $\limsup a_n = \infty$ mientras que $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$?

c) Pruebe que si $b_n = a_{n+1} - a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$.

Sugerencia: Muestre que $a_n - \sigma_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} kb_k$.

19. * Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos cerrados tales que $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$; para cada $n \in \mathbb{N}$ notamos por λ_n la longitud de I_n. Mostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n$ existe y que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n > 0$ entonces $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ es un intervalo cerrado de longitud $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n$.