

## Práctica No. 5

1. Analizar en cada caso la existencia de  $\int_a^b f d\alpha$  y calcularla cuando exista.

(a)  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función arbitraria y  $f$  constante sobre  $[a, b]$ .

(b)  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con  $\alpha(a) = a_0$ ,  $\alpha(b) = b_0$ ; sea  $c \in (a, b)$  y sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la función

$$f(x) := \begin{cases} 5 & \text{si } x \in [a, c) \\ 3 & \text{si } x = c \\ -1 & \text{si } x \in (c, b] \end{cases}.$$

¿Qué sucede si en lugar de tomar  $\alpha$  continua sólo se sabe que  $\alpha$  es continua en  $c$ ?

(c)  $f$  como en el ítem anterior y  $\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, c] \\ -1 & \text{si } x \in (c, b] \end{cases}$ .

(d)  $f(x) = x^3$ ,  $\alpha(x) = x^2$  y  $[a, b] = [-1, 3]$ .

(e)  $f(x) = \alpha(x) = \cos(x)$  y  $[a, b] = [0, \frac{\pi}{4}]$ .

2. Supongamos que  $\int_a^b f d\alpha$  existe y es igual a 0 para toda función monótona creciente  $f$ .

¿Qué puede decir sobre la función  $\alpha$ ?

[Sug.: para cada  $c \in [a, b]$  considere la función monótona  $f_c$  definida como  $f_c(x) = 0$  si  $a \leq x \leq c$  y  $f_c(x) = 1$  sino.]

3. Sean  $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Para cada partición  $\pi = \{x_0, \dots, x_n\}$  del intervalo  $[a, b]$ , se define

$s_\pi := \sum_{k=1}^n f(t_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$ , donde  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ . Se define también la *norma* de  $\pi$  como:

$$\|\pi\| := \max\{x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Demostrar que si  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$  entonces existe una sucesión de particiones  $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  que cumple todas las condiciones siguientes:

i.  $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  es monótona en el sentido siguiente: si  $m < m'$  entonces  $\pi_m \subset \pi_{m'}$ .

ii.  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\pi_m\| = 0$ .

iii.  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{\pi_m} = \int_a^b f d\alpha$ , independientemente de la elección de los  $t_k$  en cada suma  $s_{\pi_m}$ .

iv. Si  $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}}$  es otra sucesión monótona de particiones tal que  $\pi_m \subset \sigma_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, entonces cumple las condiciones ii. y iii. precedentes.

(b) Si ahora  $g, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  son otras funciones, tales que  $g \in \mathfrak{R}(\beta)$  y para cada partición  $\pi$  notamos  $r_\pi := \sum_{k=1}^n g(t_k)[\beta(x_k) - \beta(x_{k-1})]$ , donde  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , deducir que entonces existe

una sucesión de particiones  $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{\pi_m} = \int_a^b f d\alpha$  y  $\lim_{m \rightarrow \infty} r_{\pi_m} = \int_a^b g d\beta$ .

4. Otra definición de integral de Riemann-Stieltjes <sup>1</sup>

Con las mismas notaciones que en el ejercicio anterior: sean  $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , diremos que  $f$  es integrable Riemann-Stieltjes<sup>★</sup> con respecto a la función  $\alpha$  (notaremos  $f \in \mathfrak{R}^\star(\alpha)$ ) si se cumple: existe un  $A \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|s_\pi - A| < \varepsilon$  para toda partición  $\pi$  con  $\|\pi\| < \delta$ , independientemente de los valores de  $t_k$ . En este caso diremos que  $A$  es la integral de Riemann-Stieltjes<sup>★</sup> de  $f$  respecto a  $\alpha$ .

(a) Demostrar que  $\mathfrak{R}^\star(\alpha) \subseteq \mathfrak{R}(\alpha)$ .

(b) Sean  $f, \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas así: si  $c \in (a, b)$  entonces  $f(x) = \alpha(x) = 0$  para  $a \leq x < c$ ,  $f(x) = \alpha(x) = 1$  para  $c < x \leq b$ ,  $f(c) = 0$  y  $\alpha(c) = 1$ . Demostrar que  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$  pero que  $f \notin \mathfrak{R}^\star(\alpha)$ .

[Sug.: considere particiones  $\pi$  tales que  $c \in \pi$  para ver que  $f \in \mathfrak{R}(\alpha)$  y particiones  $\pi'$  tales que  $c \notin \pi'$  para ver que  $f \notin \mathfrak{R}^\star(\alpha)$ .]

5. Sean  $f; \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $c \in (a, b)$  tales que  $\int_a^c f d\alpha$  y  $\int_c^b f d\alpha$  existen. Demostrar que  $\int_a^b f d\alpha$  también existe y que vale la igualdad:  $\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$ .

6. Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monótona creciente.

Demostrar que si  $f, g \in \mathfrak{R}(\alpha)$  y  $f(x) \leq g(x)$ , entonces  $\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b g d\alpha$ .

7. Para cada  $x \in \mathbb{R}$  denotamos con  $[x]$  a la parte entera de  $x$ , es decir:  $[x] := \max \{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$ . Analizar la existencia de las integrales que siguen y en caso afirmativo calcularla:

(a)  $\int_0^4 x^2 d([x])$

(b)  $\int_0^2 x d(x - [x])$

(c)  $\int_0^2 x^2 d(|x|)$

<sup>1</sup> De la parte (b) de este ejercicio se deduce que la definición de integral de Riemann-Stieltjes<sup>★</sup> no es equivalente a la dada en clase; sin embargo la mayoría de las propiedades generales se preservan con ligeras modificaciones.