

Práctica No. 1

1. A partir de los axiomas de cuerpo demostrar las siguientes propiedades cualesquiera sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:
 - i) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.
 - ii) Si $ab = ac$ entonces $b = c$.
 - iii) Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.
 - iv) $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$.
 - v) Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$.

2. A partir de los axiomas de cuerpo ordenado demostrar las siguientes propiedades cualesquiera sean a, b y $c \in \mathbb{R}$:
 - i) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
 - ii) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.
 - iii) Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.
 - iv) Si $ab > 0$ entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.
 - v) Si $a^2 + b^2 = 0$ entonces $a = b = 0$.
 - vi) Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

3. Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} y sea $s \in \mathbb{R}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - i) s satisface las siguientes dos condiciones:
 - (a) $\forall a \in A$ se tiene $s \geq a$;
 - (b) si $t \geq a$ para todo $a \in A$ entonces $t \geq s$.
 - ii) s satisface las siguientes dos condiciones:
 - (a) $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
 - (b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$ tal que $s - \varepsilon < a_\varepsilon$.
 - iii) s satisface las siguientes dos condiciones:
 - (a) $\forall a \in A$, se tiene $s \geq a$;
 - (b) existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida A tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$.

Enuncie caracterizaciones análogas para el ínfimo de A y demuestre su equivalencia.

4. Sean A y $B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos, tales que $A \subseteq B$.

- a) Suponiendo que A y B están acotados superior e inferiormente. Establezca y demuestre las relaciones de orden que hay entre los números $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$, $\inf(B)$.
- b) ¿Qué sucede cuando A o B no está acotado superior o inferiormente?

5. Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} :

- (a) $A_1 = (a, b]$.
- (b) $A_2 = \left\{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.
- (c) $A_3 = A_2 \cup \{0\}$.
- (d) $A_4 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$.
- (e) $A_5 = \{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$.
- (f) $A_6 = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.
- (g) $A_7 = \{x^2 - 5x + 4 : x \in [2, 4]\}$.
- (h) $A_8 = \emptyset$.

6. Si $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío, para cada $c \in \mathbb{R}$ se definen los conjuntos

$$c.A = \{c.x : x \in A\} \quad y \quad -A = (-1).A.$$

Probar las siguientes afirmaciones:

- i) Si A está acotado superiormente entonces $-A$ está acotado inferiormente y se tiene que $\inf(-A) = -\sup A$.
- ii) Si $c > 0$ y A está acotado superiormente entonces $c.A$ también lo está y $\sup(c.A) = c \sup A$.
- iii) ¿Qué se puede decir en el caso que $c < 0$?
- iv) Enuncie resultados análogos a los anteriores para $\inf(c.A)$ (y demuestre alguno(s) si tiene ganas).

7. Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ambos no vacíos se definen los conjuntos

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\} \quad y \quad A.B := \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

- i) ¿Qué condiciones deben satisfacer A y B para que exista $\sup(A + B)$? Cuando se cumplen, estudiar la relación entre $\sup(A + B)$ y $\sup(A) + \sup(B)$.
- ii) Realice el mismo análisis para el conjunto $A.B$ y los números $\sup(AB)$ y $\sup(A) \cdot \sup(B)$.

8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Probar las siguientes afirmaciones:

- a) Existe un único entero n tal que $n \leq a < n + 1$. Llamamos a n la *parte entera* de a .
- b) Existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.
- c) Probar que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ estrictamente decreciente tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$.

A raíz de este hecho decimos que \mathbb{Q} es *denso* en \mathbb{R} .

9. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = a^2$.
10. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.
11. Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión definida recursivamente por $a_0 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ para cada $n \geq 0$. Muestre que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona y que está acotada superiormente por 2. Determine su límite.
12. Hallar los puntos límites y los límites superior e inferior de las sucesiones:

$$\begin{array}{lll}
 (a) 1 - \frac{1}{n} & (b) (-1)^n & (c) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
 (d) (-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right) & (e) \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots & (f) \frac{n + (-1)^n(2n+1)}{n}
 \end{array}$$

13. Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones acotadas de números reales tales que $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

14. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones acotadas de números reales, determinar y demostrar las relaciones de orden entre los siguientes cuatro números:

$$\begin{array}{ll}
 \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) & \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \\
 \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n & \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n
 \end{array}$$

15. a) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos tal que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- b) Usando este resultado mostrar que:
- i) Si $\alpha > 0$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$.
 - ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.
 - iii) Si $0 < \alpha < 1$ y $k \in \mathbb{Z}$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \alpha^n = 0$.

16. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada superiormente. Probar que $M \in \mathbb{R}$ es el límite superior de esta sucesión si y sólo si para todo $\epsilon > 0$

i) existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ para los que $a_n > M - \epsilon$, y

ii) existe solamente una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$ para los que $a_n > M + \epsilon$.

17. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada superiormente. Probar que el límite superior es el máximo de los puntos límites de la sucesión.

18. Dadas $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones acotadas de números reales, se define la sucesión $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

$$c_{2n} = a_n \quad \text{y} \quad c_{2n-1} = b_n.$$

¿Cuál es la relación entre el límite superior de $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y los de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

19. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

(a) Probar que si $r < L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r \quad \forall n \geq n_0$.

(b) Análogamente, si $r > L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r \quad \forall n \geq n_0$.

(c) ¿Puede reformularse (a) i. si se sabe que $r \leq L$?

(d) ¿Qué puede decirse de L si se sabe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r \quad \forall n \geq n_0$?
