TALLER DE CÁLCULO AVANZADO - PRIMER CUATRIMESTRE DE 2016
CLASE DE LÍMITE SUPERIOR E INFERIOR

Definición 1. *El límite inferior de una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *se define como*

$$\sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} a_k = \sup\{\inf\{a_k : k \geq n\} : n \geq 0\}$$

o también como

$$\lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

y se denota como $\liminf_{n\to\infty} a_n$ *o como* $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. *Análogamente se define*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} a_k = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k\right).$$

Por otro lado, sea

$$L = \{\textit{puntos límites de } (a_n)_n\} = \{l : \textit{ existe una subsucesión } (a_{n_k})_k \textit{ tal que } a_{n_k} \to_{k\to+\infty} l\},$$

equivalentemente, definimos

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup L \quad y \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf L.$$

Ejemplo 1. *Hallar* $\limsup$ *y* $\liminf$ *de las siguientes sucesiones:*

(1) $a_n = n^{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}$.

(2) $a_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & n \textit{ impar} \\ \frac{1}{n+1} & n \textit{ par.} \end{cases}$

(3) $a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$.

(4) $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{1}{n+1}} & n \textit{ impar} \\ 1 & n \textit{ par.} \end{cases}$

Ítem (1)

Escribamos algunos términos de la sucesión

$$\begin{aligned}\{a_n : n \in \mathbb{N}\} &= \{1^{\sin\frac{\pi}{2}}, 2^{\sin\pi}, 3^{\sin\frac{3}{2}\pi}, 4^{\sin 2\pi}, 5^{\sin\frac{5}{2}\pi}, \ldots\} \\ &= \{1, 2^0, 3^{-1}, 4^0, 5^1, 6^0, \ldots\} = \left\{1, 1, \frac{1}{3}, 1, 5, 1, \frac{1}{7}, 1, 9, \ldots\right\}.\end{aligned}$$

Por lo que vemos, tenemos 3 subsucesiones convergentes:

- $\{a_3, a_7, a_11, \ldots\} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots\}$, $a_{4k-1} = \frac{1}{4k-1} \to_{k\to+\infty} 0$.
- $\{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$, $a_{2k} = 1 \to_{k\to+\infty} 1$.
- $\{a_1, a_5, a_9, \ldots\} = \{1, 5, 9, \ldots\}$, $a_{4k-3} = 4k - 3 \to_{k\to+\infty} +\infty$.

Hasta ahora, tenemos que $\{0, 1, +\infty\} \subset L$. Sospechamos que $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y que $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$, tenemos que probarlo formalmente.

Observemos que $0 < a_n < +\infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces para toda subsucesión convergente, su límite l debe pertenecer a $[0, +\infty]$, entonces

$$0 \leq \inf L \leq \sup L \leq +\infty, \quad (\text{o bien } L \subset [0, +\infty]). \tag{1}$$

Notemos que $0 \in L$ pues la subsucesión a_{4k-1} tiende a cero, además, por (1), 0 es cota inferior de L, por lo tanto, $0 = \min L = \inf L = \liminf_{n\to\infty} a_n$. Similarmente, $+\infty \in L$ pues la subsucesión a_{4k-3} tiende a $+\infty$, por (1), $+\infty$ es cota superior de L, luego $+\infty = \max L = \sup L = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Ojo! No estamos usando la definición de ínfimos de L con sucesiones. En principio, por el análisis que hicimos al principio, sabemos que $0, 1, +\infty$ son elementos de L. Si queremos usar la definición con sucesiones, podemos considerar, para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $b_n = 0 \in L$. Así 0 es cota inferior de L y $(b_n)_n \subset L$ cumple que $b_n \to_{n\to+\infty} 0$.

Ítem (2)

Escribamos algunos términos de la sucesión

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \ldots\right\}.$$

Por lo que vemos, tenemos 2 subsucesiones convergentes (pero no sabemos que son todas!):

- $\{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots\}$, $a_{2k} = \frac{1}{2k+1} \to_{k\to+\infty} 0$.
- $\{a_1, a_3, a_5, \ldots\} = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots\}$, $a_{2k-1} = \frac{2k-1}{2k} \to_{k\to+\infty} 1$.

Con esto sospechamos que $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ y que $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$, pero tenemos que probarlo formalmente.

Observemos que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1} < 1, \quad \text{para } n \text{ impar} \quad \text{y} \quad 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{para } n \text{ par},$$

entonces $0 < a_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como hicimos en el ítem anterior, podemos concluir que $L \subset [0, 1]$. Por lo tanto

$$0 \leq \inf L \leq \sup L \leq 1. \tag{2}$$

Notemos que $0 \in L$ pues la subsucesión a_{2k} tiende a cero, además, por (2), 0 es cota inferior de L, por lo tanto, $0 = \min L = \inf L = \liminf_{n\to\infty} a_n$. Similarmente, $1 \in L$ pues la subsucesión a_{2k-1} tiende a 1, por (2), 1 es cota superior de L, luego $+\infty = \max L = \sup L = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Ítem (3)

Escribamos algunos términos de la sucesión

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0, \ldots\right\}.$$

Observamos que se repite una secuencia cada 6 términos de la sucesión. Utilicemos la primera definición de límite superior, tenemos que

$$\sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\} = \sup\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Análogamente, se prueba que $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ítem (4)

Escribamos algunos términos de la sucesión

$$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{2^{\frac{1}{2}}, 1, 2^{\frac{1}{4}}, 1, 2^{\frac{1}{4}}, 1, 2^{\frac{1}{6}}, 1, 2^{\frac{1}{6}}, 1, \ldots\right\}.$$

Consideremos $M_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$ y $m_k = \inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots\}$, podemos construir la siguiente tabla:

$k =$	1	2	3	4	5	6	...
M_k	$2^{\frac{1}{2}}$	$2^{\frac{1}{4}}$	$2^{\frac{1}{4}}$	$2^{\frac{1}{6}}$	$2^{\frac{1}{6}}$	$2^{\frac{1}{8}}$	...
m_k	1	1	1	1	1	1	...

Entonces tenemos que

$$M_k = \begin{cases} 2^{\frac{1}{k+1}} & k \text{ impar} \\ 2^{\frac{1}{k+2}} & k \text{ par} \end{cases} \quad \text{y} \quad m_k = 1.$$

Por lo tanto $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} M_k = 1$ y $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} m_k = 1$. Observemos que podemos concluir que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.