Práctica 5 – Sucesiones de funciones

1 En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$:

(a) $f_n(x) = x^n, \quad S = (-1, 1]$

(b) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}, \quad S = (1, +\infty)$

(c) $f_n(x) = n^2 x (1-x)^n, \quad S = [0, 1]$

2 Demostrar que la sucesión de $1(a)$ converge uniformemente en $T = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. ¿Es uniforme la convergencia en $(-1, 1]$?

3 Demostrar que la sucesión de $1(b)$ converge uniformemente en $T = [2, 5]$. ¿Es uniforme la convergencia en $(1, 2)$? ¿Y en $(2, +\infty)$?

4 Demostrar que para la sucesión de $1(c)$ existe $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ pero que no coincide con la integral del límite puntual (es decir, el límite no puede "pasar adentro de la integral").

5 Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones sobre todo $\mathbb{R}$:

(a) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$

(b) $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{n}\right)$

(c) $f_n(x) = \dfrac{n}{n+1} \cdot x$

(d) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{x^3}{1+nx^2}$

6 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^m$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de S en $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f : S \to \mathbb{R}$. Supongamos que cada f_n es acotada, es decir que para cada n existe una constante $M_n > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in S$.

(a) Demostrar que f es acotada.

(b) Demostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es *uniformemente acotada*, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in S$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

7 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^m$ y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de funciones de S en $\mathbb{R}$ que convergen uniformemente a funciones $f, g : S \to \mathbb{R}$ respectivamente.

(a) Demostrar que $f_n + g_n$ converge uniformemente a $f + g$.

(b) Demostrar que si las f_n y las g_n son acotadas entonces $f_n g_n$ converge uniformemente a fg.

(c) Mostrar con un ejemplo que el resultado anterior no es cierto si se permite que las g_n no estén acotadas.

8 Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones derivables de (a, b) en $\mathbb{R}$. Supongamos que f'_n converge uniformemente a 0 en (a, b) y que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = c$. Demostrar que f_n converge uniformemente a c en (a, b).

$\boxed{\mathbf{9}}$ Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas en $S \subset \mathbb{R}$. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Para $N \in \mathbb{N}$, sea $F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$. Probar que, si $|f_n(x)| \leq a_n$ para todo $x \in S$, entonces $(F_N(x))_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en S.