Práctica 4 – Funciones continuas

1 Sean $f : X \to Y$ una función, $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$. Decidir en cada uno de los siguientes casos si corresponde $=$, $\subseteq$, $\supseteq$, o ninguna de las anteriores (y demostrarlo).

(a) $f(A \cup B)$ ...... $f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B)$ ...... $f(A) \cap f(B)$

(c) $f(A - B)$ ...... $f(A) - f(B)$

(d) $f(X - B)$ ...... $Y - f(B)$

(e) $f^{-1}(C \cup D)$ ...... $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(f) $f^{-1}(C \cap D)$ ...... $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

(g) $f^{-1}(C - D)$ ...... $f^{-1}(C) - f^{-1}(D)$

(h) $f^{-1}(Y - D)$ ...... $X - f^{-1}(D)$

En los casos en los que no vale la igualdad, determinar si vale al tener la hipótesis adicional de que f es inyectiva o sobreyectiva.

2 Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Determinar todos los puntos de $[0, 1]$ en los que f es continua.

3 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}^m$ una función. Demostrar que son equivalentes:

(i) f es continua (en todo punto de S).

(ii) Para todo abierto $U \subseteq \mathbb{R}^m$, existe un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(U) = V \cap S$.

(iii) Para todo cerrado $F \subseteq \mathbb{R}^m$, existe un cerrado $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(F) = E \cap S$.

4 Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dos funciones continuas.

(a) Demostrar que $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\}$ es un conjunto cerrado.

(b) Sea S un subconjunto *denso* de $\mathbb{R}^n$ (es decir, tal que $\overline{S} = \mathbb{R}^n$). Demostrar que si para todo $x \in S$ se cumple que $f(x) = g(x)$, entonces $f = g$.

5 Sean (a, b) y (c, d) dos intervalos abiertos en la recta real. Sea $f : (a, b) \to (c, d)$ una función estrictamente creciente y biyectiva. Demostrar que f es una función continua.

6 Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Se define la función $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}.$$

Demostrar que h es una función continua.

7 Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$d_S(x) = \text{ínf}\{\|x - s\| : s \in S\}.$$

En otras palabras, $d_S(x)$ es el ínfimo de las distancias de x a los puntos de S.

(a) Demostrar que $d_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua.

(b) Demostrar que $\{x \in \mathbb{R}^n : d_S(x) = 0\} = \overline{S}$.

(c) Demostrar que si S es cerrado, entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe un punto $p \in S$ tal que $d_S(x) = \|x - p\|$ (en otras palabras, hay un punto de S que minimiza la distancia a x).

8 Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Demostrar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$. Mostrar con un ejemplo que el resultado no es cierto si se omite la hipótesis de que K es compacto.

9 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Demostrar que f tiene un mínimo global.

10 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. El *gráfico* de f es el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

(a) Demostrar que si f es continua entonces $G(f)$ es cerrado.

(b) Mostrar con un ejemplo que en general no vale la recíproca.

(c) Demostrar que si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $G(f)$ es cerrado, entonces f es continua.

11 Determinar cuáles de las siguientes funciones son uniformemente continuas:

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|$

(b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|^2$

(c) $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$

(d) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$

(e) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{|x|}$

(f) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

12 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y sean $f, g : S \to \mathbb{R}^m$ dos funciones. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas, dando una demostración o un contraejemplo respectivamente.

(a) Si f y g son uniformemente continuas, entonces $f + g$ es uniformemente continua.

(b) Si f y g son uniformemente continuas, entonces $f \cdot g$ es uniformemente continua.

(c) Si f y g son uniformemente continuas y S es compacto, entonces $f \cdot g$ es uniformemente continua.

13 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y sean $f : S \to \mathbb{R}^m$, $g : f(S) \to \mathbb{R}^k$ dos funciones uniformemente continuas. Demostrar que $g \circ f$ es uniformemente continua.

14 Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $(-\infty, a]$ y $[a, +\infty)$. Demostrar que f es uniformemente continua (en todo $\mathbb{R}$).

15 Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe y es un número real. Demostrar que f es uniformemente continua.

16 Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Una función $f : S \to \mathbb{R}^m$ se dice *Lipschitz* si existe una constante $c > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq c \cdot \|x - y\|$ para todos $x, y \in S$.

(a) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y sea $f : S \to S$ una función Lipschitz de constante $c < 1$. Demostrar que f tiene un *punto fijo*, es decir, existe $x \in S$ tal que $f(x) = x$.

Sugerencia. Sea $x_1 \in S$ arbitrario, y para cada $n \geq 1$ definimos $x_{n+1} = f(x_n)$. Probar que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ así obtenida es de Cauchy.

(b) Mostrar con un ejemplo que el resultado no es cierto si se permite que la constante c sea igual a 1.

(c) Mostrar con un ejemplo que el resultado no es cierto si se omite la hipótesis de que S es cerrado.

17 Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \to K$ una función tal que la desigualdad $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ se cumple para todos $x, y \in K$ con $x \neq y$. (En particular f es Lipschitz con constante $c = 1$, pero notar que la desigualdad es estricta.)
Demostrar que f tiene un punto fijo.

Sugerencia. Considerar la función $g : K \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \|x - f(x)\|$.

18 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2}$. Demostrar que la desigualdad $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ se cumple para todos $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, pero f no tiene ningún punto fijo.

Sugerencia. Usar el teorema del valor medio.