

Práctica 3 – Topología en \mathbb{R}^n

- 1** Para cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} , determinar si son abiertos, si son cerrados y si son acotados.

(a) $(0, 1]$

(d) $(0, +\infty)$

(b) \mathbb{Q}

(e) $\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$

(c) \mathbb{N}

(f) $\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

- 2** Para cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 , determinar si son abiertos, si son cerrados y si son acotados.

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2\}$

(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$

(f) $[0, 1] \times (0, 1)$

- 3** Sean S y T subconjuntos de \mathbb{R}^n . Demostrar las siguientes propiedades:

(a) Si $S \subseteq T$, entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$. ¿Vale la vuelta?

(b) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Siguió valiendo para una intersección infinita?

(c) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

(d) $(\mathbb{R}^n - S)^\circ = \mathbb{R}^n - \bar{S}$.

(e) $\overline{\mathbb{R}^n - S} = \mathbb{R}^n - S^\circ$.

(f) Si $S \subseteq T$, entonces $\bar{S} \subseteq \bar{T}$. ¿Vale la vuelta?

(g) $\overline{S \cup T} = \bar{S} \cup \bar{T}$. ¿Siguió valiendo para una unión infinita?

(h) $\overline{S \cap T} \subseteq \bar{S} \cap \bar{T}$. Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

- 4** Para cada uno de los siguientes conjuntos $S \subseteq \mathbb{R}^n$, hallar S° , \bar{S} y ∂S .

(a) $S = (0, 1]$

(d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$

(b) $S = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$

(e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$

(c) $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

(f) $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

- 5** Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n .

(a) Demostrar que S es abierto si y sólo si $S \cap \partial S = \emptyset$.

(b) Demostrar que S es cerrado si y sólo si $\partial S \subseteq S$.

(c) Demostrar que $p \in \partial S$ si y sólo si para todo $r > 0$ la bola $B(p, r)$ contiene un punto que está en S y un punto que no está en S .

- 6** Sean S y T subconjuntos no vacíos de \mathbb{R}^n . Se define

$$S + T := \{s + t : s \in S, t \in T\}.$$

(a) Demostrar que si S es abierto, entonces $S + T$ también lo es.

(b) ¿Es cierto que si S y T son cerrados entonces $S + T$ también lo es?

Sugerencia. Considerar $S = \left\{n + \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ y $T = \mathbb{Z}$.

7 Demostrar que los únicos subconjuntos de \mathbb{R} que son abiertos y cerrados a la vez son \emptyset y \mathbb{R} .

8 Una función $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se llama una *norma* si cumple las siguientes propiedades:

- $N(v) = 0$ si y sólo si $v = (0, 0, \dots, 0)$,
- $N(\lambda \cdot v) = |\lambda| \cdot N(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $v \in \mathbb{R}^n$,
- $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ para todos $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Consideramos las funciones

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{y} \quad \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

(a) Demostrar que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas.

(b) Demostrar que

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|v\|_2 \leq n \cdot \|v\|_\infty$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$, donde $\|v\|_2$ denota la norma euclídea.

Sugerencia. Para la segunda desigualdad, usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

(c) Dada una norma N en \mathbb{R}^n , una *bola abierta para la norma N* es cualquier conjunto de la forma

$$B_N(p, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : N(x - p) < r\},$$

con $p \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Graficar $B_N(0, 1)$ en \mathbb{R}^2 para las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.

(d) Si S es un subconjunto de \mathbb{R}^n , decimos que S es *abierto para la norma N* si para todo $p \in S$ existe $r > 0$ tal que la bola $B_N(p, r)$ está contenida en S .

Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n . Probar que son equivalentes:

- (i) S es abierto para la norma $\|\cdot\|_\infty$.
- (ii) S es abierto para la norma $\|\cdot\|_1$.
- (iii) S es abierto (o sea, es abierto para la norma euclídea).

9 Sea K un subconjunto de \mathbb{R} . Demostrar que si K es compacto, entonces tiene máximo y mínimo. ¿Vale la vuelta?

10 Para cada $n \geq 2$ sea I_n el intervalo abierto $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$.

(a) Demostrar que $(0, 1) = \bigcup_{n \geq 2} I_n$.

(b) ¿Existe algún subconjunto **finito** $F \subseteq \mathbb{N}_{\geq 2}$ tal que $(0, 1) = \bigcup_{n \in F} I_n$?

(c) ¿Es $(0, 1)$ un subconjunto compacto de \mathbb{R} ?

11 Sea $S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$. Demostrar que S es compacto.

- 12** Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales y sea $P \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto de sus puntos límites. Demostrar que P es compacto.
- 13** Sean S y T subconjuntos de \mathbb{R}^n . Demostrar las siguientes propiedades:
- (a) Si S es acotado, entonces \overline{S} es compacto.
 - (b) Si S y T son compactos, entonces $S \cup T$ es compacto. ¿Siguiendo valiendo para una unión infinita?
 - (c) Si S es compacto y T es cerrado, entonces $S \cap T$ es compacto.
 - (d) Si S es compacto y T es cerrado, entonces $S + T$ es cerrado.
 - (e) Si S y T son compactos, entonces $S + T$ es compacto.
- 14** Sean K y U subconjuntos de \mathbb{R}^n con K compacto, U abierto y $K \subseteq U$. Demostrar que existe $r > 0$ tal que $\bigcup_{x \in K} B(x, r) \subseteq U$.
- Sugerencia.** Si esto no es cierto, para cada $n \in \mathbb{N}$ debe existir un punto $x_n \in K$ tal que la bola $B(x_n, \frac{1}{n})$ no está contenida en U . Tenemos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en un compacto, entonces...
- 15** Sean $K_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $K_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ subconjuntos compactos no vacíos. Demostrar que el conjunto $K_1 \times K_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ es compacto.