Práctica 2 – Series

1 Determinar cuáles de las siguientes series son convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2(n)}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

2 Calcular la suma de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

3 Calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$.

Sugerencia. Descomponer el término general de la serie en la forma $\frac{A}{n!}+\frac{B}{(n-1)!}+\frac{C}{(n-2)!}$ con $A, B, C \in \mathbb{R}$ adecuados, y recordar que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

4 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|\alpha| < 1$. Demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$.

5 (a) Demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale la siguiente desigualdad:

$$0 \leq \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

(b) Sea $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Sumando sobre k, deducir de lo anterior que

$$0 \leq H_n - \ln(n+1) \leq 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Concluir que la sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $r_n = H_n - \ln(n+1)$ es convergente.

Nota. El límite de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se conoce como la *constante de Euler-Mascheroni* y se suele representar con la letra γ. Su valor numérico es 0,5722.... A diferencia de otras constantes "famosas" como π y e, aún no se sabe si γ es racional o irracional.

6 El objetivo de este ejercicio es calcular la suma de la serie armónica alternada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, que sabemos que converge por el criterio de Leibniz.

(*a*) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale la siguiente identidad:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+1}.$$

(*b*) El lado derecho de la igualdad anterior es $H_{2n+1} - H_n$. Usar lo probado en el ejercicio anterior para calcular el límite de esta expresión cuando $n \to \infty$.

(*c*) Concluir que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.

7 Determinar si las siguientes series convergen absolutamente o condicionalmente:

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$ (*b*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ (*c*) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n!}$

8 Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas, dando una demostración o un contraejemplo respectivamente.

(*a*) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es divergente.

(*b*) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente.

(*c*) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente.

9 Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, entonces también converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

Sugerencia. Cauchy-Schwarz.

10 Determinar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que resultan convergentes cada una de las siguientes series:

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ (*c*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$ (*e*) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$

(*b*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$ (*d*) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3^n}\right)$ (*f*) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$

11 Probar el siguiente teorema, debido a Abel: si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de números positivos tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

Sugerencia. Observar que $0 \leq na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}$. ¿Qué es el lado derecho, y a dónde tiende cuando $n \to \infty$? Luego hacer algo similar para a_{2n+1}.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de números positivos. Definimos

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \qquad \text{y} \qquad T_N = \sum_{n=0}^{N} 2^n a_{2^n}.$$

(a) Probar que $S_{2^k-1} \leq T_{k-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sugerencia. Recordar la demostración de la divergencia de la serie armónica.

(b) Probar que $T_k \leq 2S_{2^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(c) Deducir de lo anterior el *criterio de condensación de Cauchy*: si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de números positivos, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ es convergente.