

Práctica 4: Funciones continuas

1. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $A, B, X, Y \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos. En cada uno de los siguientes casos, decida si corresponde \subseteq , \supseteq o $=$ y pruébelo.

$$\begin{array}{llll}
 (i) & f(A \cup B) & \dots\dots & f(A) \cup f(B) \\
 (ii) & f^{-1}(X \cup Y) & \dots\dots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
 (iii) & f(A \cap B) & \dots\dots & f(A) \cap f(B) \\
 (iv) & f^{-1}(X \cap Y) & \dots\dots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
 (v) & f(A^c) & \dots\dots & (f(A))^c \\
 (vi) & f^{-1}(X^c) & \dots\dots & (f^{-1}(X))^c
 \end{array}$$

2. Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ si y solo si para toda sucesión estrictamente decreciente $(x_n)_{n \geq 1}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ vale que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

3. Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona y $x \in (a, b)$. Si existe una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ con valores en $(a, b]$ tal que $x_n < x$ para todo $n \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$, entonces $f(x^-) = l$. Enuncie el resultado correspondiente para $f(x^+)$ (recordemos que

$$f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{y} \quad f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)).$$

4. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Si f es continua en $a \in A$ y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a .

5. a) Una función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(y)$ cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{Q}$ es necesariamente constante.

b) Dos funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas que coinciden sobre \mathbb{Q} son iguales.

6. Encuentre los puntos donde las siguientes funciones son continuas:

a) $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0; \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

7. Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ es una función continua, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.
Sugerencia: Considere la función $x \mapsto x - f(x)$.
8. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- La función f es continua.
 - El conjunto $f^{-1}(O)$ es abierto para todo $O \subseteq \mathbb{R}$ abierto.
 - El conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado.
9. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces el gráfico de f es un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^2 .
10. a) Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto. Si $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.
- b) Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto que *no* es compacto, existe una función continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ que toma valores positivos y tal que $\inf\{f(x) : x \in A\} = 0$. Esto nos dice que la condición de que K sea compacto en la primera parte de este ejercicio es necesaria.
11. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, entonces f es acotada inferiormente y tiene mínimo.
12. Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.
- El conjunto $\{|x| : x \in K\}$ es compacto.
 - Si $c \in f(K)$, entonces entre las raíces x de la ecuación $f(x) = c$ hay una de módulo mínimo.
13. * Como el conjunto $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ es numerable e infinito, hay una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ tal que $\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{x_n : n \geq 1\}$.
- Si $x \in (0, 1)$ y ponemos $\Omega_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x\}$, entonces la serie

$$\sum_{n \in \Omega_x} \frac{1}{2^n}$$

converge. Podemos entonces definir una función $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in (0, 1)$ sea $f(x) = \sum_{n \in \Omega_x} 2^{-n}$.

- La función f es monótona creciente.
- La función f es discontinua en todo punto de $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ y, de hecho, si $x \in \mathbb{N}$ es $f(x_n^+) - f(x_n^-) = 2^{-n} > 0$.
- La función f es continua a izquierda, de manera que para todo $x \in (0, 1)$ es $f(x^-) = f(x)$.
- La función f es continua en todo punto de $(0, 1) \setminus \mathbb{Q}$.

14. Estudie la continuidad uniforme de las funciones siguientes:

- a) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$.
- b) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$.
- c) $f : x \in (r, +\infty) \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$, primero con $r = 0$ y luego con $r > 0$.
- d) $f : x \in (0, 1) \mapsto \sin \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$.
- e) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$.

15. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones uniformemente continuas.

- a) La función $f + g$ es uniformemente continua.
 - b) En cambio, la función $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua, aún si alguna de las funciones f ó g es acotada.
 - c) Si $h : f(S) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua definida sobre la imagen de f , entonces $h \circ f : S \rightarrow \mathbb{R}$ también lo es.
16. a) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que es uniformemente continua en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, c]$.
- b) ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, entonces también lo es en $A \cup B$?

17. Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Decimos que f es *localmente Lipschitz de orden α en x_0* si existen $\varepsilon > 0$ y $M > 0$ tales que

$$0 \leq |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < M |x - x_0|^\alpha.$$

Si $\alpha = 1$, decimos simplemente que f es Lipschitz en x_0 .

- a) Si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 , entonces f es continua en x_0 .
 - b) Si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0 , entonces f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$.
18. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es Lipschitz sobre A si existe una constante $M > 0$, a la que en ese caso llamamos constante de Lipschitz de f , tal que

$$x, y \in A \implies |f(x) - f(y)| < M |x - y|.$$

- a) Una función Lipschitz es continua en su dominio.
- b) Una función definida sobre un intervalo abierto de \mathbb{R} y allí derivable con derivada acotada es Lipschitz.
- c) La función $f : t \in [-1, 1] \mapsto \sqrt[3]{t} \in \mathbb{R}$ es uniformemente continua pero no es Lipschitz.

19. a) *Teorema de punto fijo de Banach.* Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz con constante de Lipschitz $M < 1$. Si el conjunto S es cerrado y $f(S) \subseteq S$, entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$.
Sugerencia: Sea $x_1 \in S$. Muestre que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S tal que $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \geq 1$ es una sucesión de Cauchy y considere su límite $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- b) Muestre con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone que S es un conjunto cerrado.
- c) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Muestre que f es Lipschitz con $M = 1$ pero que f no tiene puntos fijos.