Práctica No. 4

1. Sean $f : C \to D$, $A, B \subseteq C$ y $X, Y \subseteq D$. Decidir en cada caso si corresponde $\subset, \supset$ ó $=$ y probarlo.

$$\begin{array}{cccc}
(i) & f(A \cup B) & \ldots\ldots & f(A) \cup f(B) \\
(ii) & f^{-1}(X \cup Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
(iii) & f(A \cap B) & \ldots\ldots & f(A) \cap f(B) \\
(iv) & f^{-1}(X \cap Y) & \ldots\ldots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
(v) & f(C \setminus A) & \ldots\ldots & D \setminus f(A) \\
(vi) & f^{-1}(D \setminus X) & \ldots\ldots & C \setminus f^{-1}(X)
\end{array}$$

2. Sean $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $T \subseteq \mathbb{R}^m$ y $f : S \to T$. Probar que f es continua si, y sólo si, para todo $F \subseteq T$, cerrado relativo en T, $f^{-1}(F) \subseteq S$ es un conjunto cerrado relativo en S.

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}^n$. Demostrar que f es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre $\mathbb{Q}^n$ son la misma función.

4. Hallar todos los puntos donde la función f es continua, siendo

   (a) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b} & \text{si } x = \dfrac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

5. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el conjunto dado es abierto o cerrado (o ninguna de las dos cosas) y probarlo:

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2(e^x - 1) + yx = 1\}$.

   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 1 < xy + z < 2\}$.

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \sin^2(x) - xy^2 \geq -2\}$.

6. (a) Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Probar que son equivalentes:

      i. S es conexo

      ii. Dados $G, H \subset \mathbb{R}^n$ abiertos, tales que $S = (S \cap G) \cup (S \cap H)$ y $S \cap G \cap H = \emptyset$, se tiene que $G \cap S = \emptyset$ o $H \cap S = \emptyset$.

   (b) Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es conexo. ¿Qué ocurre con $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$? ¿Y con $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$?

(c) ¿Es $\mathbb{R}$ conexo? (cf. ejercicio 10, Práctica 3)

(d) Demostrar que el intervalo $[0,1]$ es conexo y que por lo tanto cualquier intervalo $[a,b]$ también lo es.

(e) Usando la función continua $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ y la parte (b), demostrar que el intervalo $(-1,1)$ es conexo. Deducir que cualquier intervalo de la forma (a,b) es conexo.

7. Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$ distintos, sea $\overline{vw} = \{v + t(w-v) : t \in [0,1]\}$ el segmento que une v y w.

   (a) Demostrar que $\overline{vw}$ es un conjunto conexo.

   (b) Sea ahora u otro punto en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que la poligonal $\Pi := \overline{vw} \cup \overline{wu}$ es un conjunto conexo y convencerse de que cualquier poligonal en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto conexo.

   (c) Demostrar que dos puntos cualesquiera de $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ pueden unirse por una poligonal totalmente contenida en el conjunto (además formada por segmentos "horizontales" y "verticales") y deducir que $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ es conexo.

   (d) Demostrar que un conjunto abierto y conexo $S \subset \mathbb{R}^n$ tiene la propiedad de que dos cualesquiera de sus puntos pueden unirse mediante una línea poligonal totalmente contenida en S. [Sug.: Dado $p \in S$ arbitrario considere los conjuntos $G := \{x \in S$ / se unen a p con una poligonal contenida en $S\}$ y $H := S - G$.]

8. Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ continua. Demostrar que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$. [Sug.: considere la función continua $x - f(x)$.]

9. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Probar que el gráfico de f es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^{n+m}$. ¿Vale la recíproca?

10. Sean $S \subset \mathbb{R}^n$ y $f : S \to \mathbb{R}^m$ una función tal que la imagen de f es un conjunto acotado y el gráfico de f es un conjunto cerrado. Demostrar que f es continua.

11. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.

12. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:

    (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \| x \|$.

    (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \| x \|^2$.

    (c) $f : (r, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ siendo $f(x) = (\sqrt{x}, \cos x)$, con $r = 0$ y con $r > 0$.

    (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ siendo $f(x,y) = x^2 + 3y$.

    (e) $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.

13. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario y sean $f, g : S \to \mathbb{R}^m$ funciones uniformemente continuas.

    (a) Probar que $f + g$ es uniformemente continua.

    (b) Mostrar con un ejemplo que $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua.

    (c) Probar que si $h : f(S) \to \mathbb{R}^k$ es otra función uniformemente continua entonces $h \circ f : S \to \mathbb{R}^k$ también lo es.

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$. Probar que f es uniformemente continua en $[a, c]$.

    ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y también sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces lo es en $A \cup B$?

15. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 y α números reales. Se dice que f es* localmente Lipschitz de orden α en el punto x_0 *si existen $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que*

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \qquad \textit{para todo } x \quad \textit{tal que} \quad 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

    Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 entonces f es continua en x_0.

16. Demostrar que las siguientes funciones son uniformemente continuas:

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ siendo $f(x) = (\cos x, \sin x)$.

17. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz pero sin embargo f es uniformemente continua (en particular "*unif. cont.* $\not\Rightarrow$ *Lipschitz*").

18. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f : S \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz. En particular, existe $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\| f(x) - f(x') \| \leq M \| x - x' \|$, $\forall x, x' \in S$. Demostrar que si S es cerrado, $M < 1$ y $f(S) \subseteq S$ entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$, en otras palabras, f *tiene un punto fijo.*

    [Sug.: considere la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en S construída recursivamente así: $x_1 \in S$ cualquiera, si x_n está definido se toma $x_{n+1} := f(x_n)$, en otras palabras, $x_{n+1} := f^{(n)}(x_1)$. Demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy; tomar $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.]

    Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone S cerrado.

19. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2}$. Demostrar que f es Lipschitz con $M = 1$ pero que f no tiene puntos fijos.

20. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $f : K \to K$ una función que verifica que la desigualdad $\| f(x) - f(x') \| < \| x - x' \|$ vale para todo $x, x' \in K$ (en particular, f es Lipschitz con $M = 1$).

    (a) Demostrar que f tiene un punto fijo.

    (b) Comparar con los ejercicios 8, 18 y 19.

    [Sug.: considere la función $g : K \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \| x - f(x) \|$.]

21. En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el conjunto $S \subset \mathbb{R}$:

    (a) $f_n(c) = x^n$, $S = (-1, 1]$.

    (b) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$, $S = (1, +\infty)$.

    (c) $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$, $S = [0, 1]$.

22. (a) Probar que la sucesión del ejercicio 21(a) converge uniformemente en $T = (0, 1/2)$, pero en $S = (-1, 1]$ converge puntualmente a una función que no es continua.
    (b) Probar que la sucesión del ejercicio 21(b) converge uniformemente en $T = [2, 5]$.

23. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:

    (a) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$, sobre todo $\mathbb{R}$.
    (b) $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$, sobre todo $\mathbb{R}$.
    (c) $f_n(x, y) = \dfrac{n}{n+1}(x, y)$, sobre todo $\mathbb{R}^2$.
    (d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ \\ b + \dfrac{1}{n} & \text{si } x = \dfrac{a}{b},\ b > 0 \text{ y } (a : b) = 1 \end{cases}$, sobre $[0, 1]$.

24. Probar que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x(x^2+1)}{1+(n+1)^2x^2}$$

converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a una función continua, pero la convergencia no es uniforme.

25. Sea $S \subset \mathbb{R}^N$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : S \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función $f : S \to \mathbb{R}$. Probar que si f_n es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces vale:

    (a) f es acotada.
    (b) Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in S$ y todo $n \in \mathbb{N}$ (en otras palabras, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada).

26. Sea $S \subset \mathbb{R}^N$ y sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de funciones de S en $\mathbb{R}$ que convergen uniformemente a funciones $f, g : S \to \mathbb{R}$ respectivamente.

    (a) Probar que $f_n + g_n$ converge uniformemente a $f + g$.
    (b) Probar que si f_n y g_n están acotadas para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $f_n g_n$ converge uniformemente a fg.
    (c) Mostrar que el item (b) no vale sin la hipótesis de acotación.

27. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n.$$

    (a) Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función cero en el intervalo $[0, 1]$.
    (b) Verificar que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \neq \int_0^1 (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))\, dx$.