Probabilidad y Estadística (para matemáticos) - Examen Final

Nombre y apellido: ....

L.U: .... Fecha: ....

1. Sean X e Y variables aleatorias independientes con esperanza finita.
   (a) Demostrar que $E[XY] = E[X]E[Y]$ en los siguientes casos
      i. Si X e Y son variables aleatorias discretas.
      ii. Si X e Y son variables continuas que admiten una densidad de probabilidad conjunta $f(x,y)$ continua.

2. (a) Enuncie y demuestre los lemas de Borel-Cantelli.
   (b) Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ $(n \in \mathbb{N})$ una sucesión de variables aleatorias independientes tales que $X_n \sim \mathcal{U}[0, a_n]$ $(a_n > 0)$. Probar que si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

   converge, probar que entonces con probabilidad 1 sólo un número finito de las X_n toma valores menores que 1; mientras que, si dicha serie diverge, entonces con probabilidad 1, un número infinito de las X_n toma valores menores que 1.

3. Supongamos que $N, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ son variables aleatorias independientes, siendo N una variable discreta con valores en $\mathbb{N}$. Notemos $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$
   (a) Si las X_i son identicamente distribuidas con esperanza finita, y N tiene esperanza finita, probar que:

$$E[S_N] = E[X_1]E[N]$$

   (b) Si N tiene distribución geométrica:

$$P\{N = n\} = q^{n-1}p \text{ con } p \in [0,1] \text{ y } q = 1 - p \ (n \in \mathbb{N})$$

   y cada X_i es una variable aleatoria con distribución exponencial exponencial $\text{Exp}(\lambda)$, con función de densidad $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)$, donde $\lambda > 0$, demostrar que S_N tiene distribución exponencial $\text{Exp}(\lambda p)$.

4. (a) Sea X una variable aleatoria con distribución de Cauchy $\mathcal{C}(\mu, \lambda)$, es decir con densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\mu)^2} \quad (\lambda > 0, \mu \in \mathbb{R})$$

   Utilizando que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-|t|}$$

   determinar la función característica de X.
   (b) Si $(X_k)_{k \in N}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución de Cauchy $\mathcal{C}(\lambda, \mu)$, encontrar la distribución de:

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

   Sugerencia: la cuenta que hay que hacer en este ejercio es muy parecida a la que interviene en la demostración del teorema del límite central, usando funciones características.
   (c) Enuncie las leyes débil y fuerte de los grandes números, explicando cuál es la diferencia entre los tipos de convergencia involucrados.
   (d) ¿En el útem b) se verifica que $\overline{X}_n \to \mu$ en probabilidad o casi seguramente? ¿Qué hipótesis de las leyes de los grandes números no se verifica?

Tenga en cuenta que debe **justificar todas sus respuestas**.