CLASE 10. DIFERENCIABILIDAD Y PLANO TANGENTE

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Repasamos derivadas parciales

Recordemos cómo calcular derivados parciales:

Ejemplo: Dada $F(x,y) = x^5y - x^3 + 2y^2$ calcular si se puede $\frac{\partial F}{\partial x}(1,2)$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(1,2)$.

Calculamos $\frac{\partial F}{\partial x}$ en un (x,y) cualquiera y después especializamos en $(1,2)$.

Dada $F(x,y) = x^5y - x^3 + 2y^2$, para calcular $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ pensamos que y es un número fijo y derivamos $\alpha(x) = F(x,y)$ con y fijo respecto de x. En este caso:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \alpha'(x) = 5x^4 \cdot y - 3x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(1,2) = 5 \cdot 1^2 \cdot 2 - 3 \cdot 1^2 = 7.$$

Lo mismo para hacer $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$. Ahora pensamos que x es un número fijo y derivamos $\beta(y) = F(x,y)$ con x fijo respecto de y. Entonces

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \beta'(y) = x^5 + 4y \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1,2) = 1^5 + 4 \cdot 2 = 9.$$

Ejemplo: Dada $F(x,y) = \cos\left(x^2y\right)$, calcular $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$.
En este caso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= -\operatorname{sen}\left(x^2y\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y\right) \\
&= -\operatorname{sen}\left(x^2y\right)2xy \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= -\operatorname{sen}\left(x^2y\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y\right) \\
&= -\operatorname{sen}\left(x^2y\right)x^2
\end{aligned}$$

Definición: : Recordemos como definir el *vector gradiente*: Dada una función $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que tiene ambas derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ definidas, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$, se define el vector gradiente como

$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right).$$

Ejemplo:
(1) Si $F(x,y) = x^5y - x^3 + 2y^2$

$$\nabla F(1,2) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(1,2), \frac{\partial F}{\partial y}(1,2)\right) = (7,9), \qquad \nabla F(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,0), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) = \left(5x^4y - 3x^2, x^5 + 4y\right).$$

(2) Si $F(x,y) = \cos\left(x^2y\right)$

$$\nabla F(x,y) = \left(-\operatorname{sen}\left(x^2y\right) \cdot 2xy, -\operatorname{sen}\left(x^2y\right) \cdot x^2\right).$$

(3) Si $F(x,y) = 2\sqrt{y - x^2}$

$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{y-x^2}} \cdot (-2x), \frac{1}{\sqrt{y-x^2}}\right), \qquad \nabla F(0,9) = \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

Definición: : Recordemos como definir el *Plano tangente*. Dada $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y $(x_0, y_0) \in A$ un punto, si existen ambas derivados parciales $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$, vimos que

$$N = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

es una dirección normal a la superficie en el punto $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$, y permite construir un plano que pasa por $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ que esperamos sea tangente al gráfico de F:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + (-1)(z - F(x_0, y_0)) = 0$$

y despejando queda

$$z = F(x_0, y_0) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}_{F_x(x_0,y_0)}(x - x_0) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}_{F_y(x_0,y_0)}(y - y_0)$$

A este plano lo llamaremos por ahora "candidato a plano tangente".

¿Se merece que lo llamemos plano tangente?

Seguiremos con esto en breve.

2. Aproximación lineal

Recordemos que en una variable si f es derivable en x_0 (es decir, existe $f'(x_0)$) entonces teníamos la recta tangente:

$$L: \quad y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

y se puede probar que $L(x)$ es la única recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ que satisface que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - L(x)}{x - x_0} = 0$$

Es decir

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0} = 0$$

Esto me dice que la recta tangente e la *mejor aproximación lineal* al gráfico de f en $(x_0, f(x_0))$.

En varias variables NO alcanza con que existan las derivadas parciales de F en (x_0, y_0) para que el "candidato a plano tangente"

$$\pi: \quad z = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

sea una buena aproximación lineal al gráfico de la función en $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$. Pediremos en cambio lo que se llama diferenciabilidad de la función.

Definición: Dada $F : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in A$, decimos que F es *diferenciable* en (x_0, y_0) si:

1. Existen $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$.
2. Vale el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{F(x, y) - [F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0)]}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0$$

Es decir, si el *candidato a plano tangente* es realmente una buena aproximación lineal del gráfico de F en (x_0, y_0), decimos que F es diferenciable, y en ese caso al candidato a plano tangente se lo llama *plano tangente*.

Ejemplo: Dada $F(x, y) = 2\sqrt{y - x^2}$, calcular el candidato a plano tangente al gráfico de F en $(0, 9, 6)$

Calculando, vemos que $\nabla f(0, 9) = \left(0, \frac{1}{3}\right)$.
Entonces

$$\pi: \quad z = 0 \cdot x + \frac{1}{3}(y - 9) + 6$$
$$z = \frac{1}{3}y + 3.$$

Nota: Al igual que en una variable tendremos una lista de funciones diferenciables y propiedades.

Por ejemplo, todos los polinomios en 2 variables son funciones diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo: Dada $F(x,y) = 3x^4y^2 - 5x^2 + y^3$ determinar si es diferenciable y calcular el plano tangente al grafico de F en $(-1,0)$.

Solución: sabemos que F es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por ser un polinomio. En particular, F es diferenciable en $(-1,0)$. Entonces podemos calcular las derivadas parciales y construir el plano tangente.

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 12x^3y^2 - 10x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x}(-1,0) = 12 \cdot (-1)^3 \cdot 0^2 - 10 \cdot (-1) = 10$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 6x^4y + 3y^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y}(-1,0) = 6 \cdot (-1)^2 0 + 3(-1)^2 = 3$$

Necesitamos calcular también $F(-1,0) = -5$.

De la ecuación del plano tangente en $(x_0,y_0) = (-1,0)$ nos quede:

$$\begin{aligned} z &= F(x_0,y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &= 3 + 10(x+1) + 3 \end{aligned}$$

2.1. Propiedades de funciones diferenciables.

Veamos algunas propiedades muy útiles:

- Cualquier función de 1 variable que es derivable, resulta deferenciable como función de 2 variables.

Ej: $F(x,y) = e^x$, $G(x,y) = \sin(y)$ son ambas diferenciables en $\mathbb{R}^2$.

- Sumar, restar, multiplicar o dividir (con denominador no nula) funciones diferenciables resulta una función diferenciable.

Ej: $H(x,y) = e^x \cdot \sin(y) + x^2y^3$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

- Componer funciones diferenciables resulta diferenciable

Ej: $I(x,y) = e^{x^2+y^2}$ es diferenciable porque $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $g(t) = e^t$ lo son.

Se puede probar el siguiente resultado sobre funciones sea diferenciables.

Teorema: Dada una función $F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(x_0,y_0) \in A$, tenemos:

∘ Si las derivadas parciales F_x y F_y existen y son contuinuas en un entorno de (x_0,y_0), entonces F es diferenciable en (x_0,y_0).

∘ Si F es diferenciable en (x_0,y_0), entonces F es continua en (x_0,y_0) y además existe en plano tangente en el punto (x_0,y_0).