CLASE 2. NÚMEROS COMPLEJOS

MATEMÁTICA I (B). 2° CUATRIMESTRE 2023

PROF. ARIEL SALORT

1. Introducción

Dado el número complejo $z = 1 + i$, vimos que gráficamente podemos graficarlo como se muestra en la figura (1).

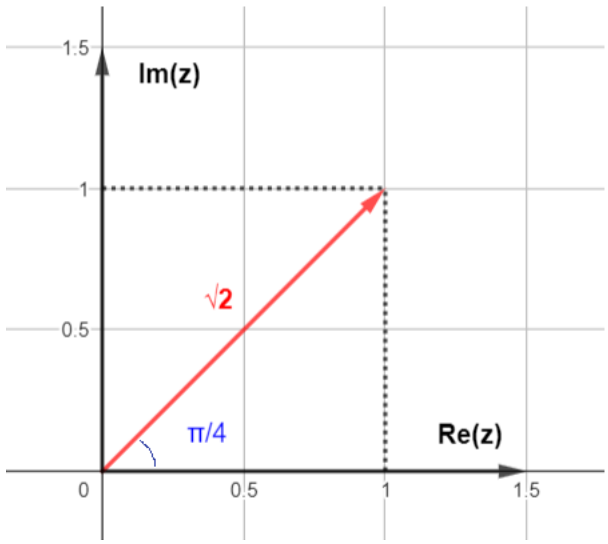

Figura 1. Módulo y argumento de un número complejo.

Sabemos que su *módulo* es $|z| = |1 + i| = \sqrt{2}$. Además z forma un ángulo con el semieje positivo $\mathrm{Re}(z)$ al que llamaremos *argumento* de z, el cual denotamos por $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$. Observar que tal ángulo siempre está en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Veremos a continuación que estas dos cantidades, argumento y módulo, determinan a un número complejo.

Ejemplo: Veamos algunos ejemplos simples:

- $z = i \quad \Longrightarrow \quad |z| = 1, \quad \arg(z) = \frac{\pi}{2}$
- $z = -1 \quad \Longrightarrow \quad |z| = 1, \quad \arg(z) = \pi$
- $z = 1 \quad \Longrightarrow \quad |z| = 1, \quad \arg(z) = 0$
- $z = -i \quad \Longrightarrow \quad |z| = 1, \quad \arg(z) = \frac{3\pi}{2}$
- $z = 2i \quad \Longrightarrow \quad |z| = 2, \quad \arg(z) = \frac{\pi}{2}$

¿Cómo encontramos $\arg(z)$ dada un número complejo z cualquiera?

Volvamos a $z = 1 + i$. Buscamos un ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El ángulo es entonces $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Esto permite escribir a $z = 1 + i$ como

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sqrt{2}\sin\tfrac{\pi}{4}.$$

Esto es lo que llamaremos *forma polar de un número complejo*.

2. Forma polar de los números complejos

La forma polar consiste en representar un número complejo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mediante dos datos:

- $|z|$ (su *módulo*, la distancia al origen)
- $\arg(z)$ (su *argumento*, el ángulo que forma con $\mathrm{Re}(z) > 0$).

2.1. Relación con la forma binomial. Dado un complejo $z = a + ib$ en forma binomial, cómo encontramos su forma polar?

Primero buscamos el módulo de z:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Segundo, buscamos el argumento de z, es decir buscamos $\alpha = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ que cumpla

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Notar que encontrado tal α, podemos escribir

$$a = |z|\cos\alpha, \qquad b = |z|\sin\alpha.$$

Esto nos da lo que llamamos *forma polar o trigonométrica* de $z = a + ib$.

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

2.2. Forma exponencial. La *fórmula de Euler* permite calcular la exponencial compleja como

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, usando la forma polar podemos escribir

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|e^{i\alpha},$$

donde $\alpha = \arg(z)$.

Ejemplo: Dado $z = 1 - i$, calcular su forma polar y exponencial.

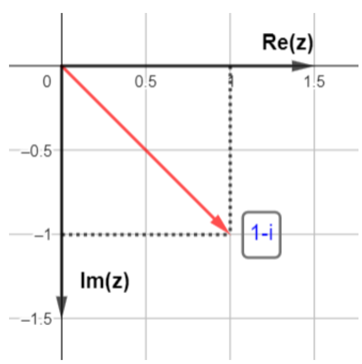

Figura 2. Representación $z = 1 - i$

Calculamos el módulo de z.

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Calculamos $\arg(z) \in [0, 2\pi)$.

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{b}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Entonces $\alpha = \frac{7}{4}\pi$.

Observar que $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ cumple las dos relaciones anteriores pero no pertenece al intervalo $[0, 2\pi)$, de hecho, $\frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi$.

Luego,

$$z = \sqrt{2}(\cos\tfrac{7\pi}{4} + i\sin\tfrac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

2.3. Tabla de ángulos notables.

La siguiente tabla puede ser de utilidad para calcular argumentos.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Observación: Un número complejo $z = a + bi$ tiene una única representación en forma polar o trigonométrica.

Ejemplo: El complejo $z = 2(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4})$ ¿está dado en forma polar?

La respuesta es que no, ya que $\frac{9\pi}{4} \notin [0, 2\pi)$. Pero como sin y cos son funciones periódicas con período 2π, tenemos que

$$\cos\tfrac{9\pi}{4} = \cos\tfrac{\pi}{4}, \qquad \sin\tfrac{9\pi}{4} = \sin\tfrac{\pi}{4}$$

ya que $\frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$. Luego, la forma polar de z es

$$z = 2(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}).$$

Además, como $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tenemos que su forma binómica es

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

2.4. Ventajas de la forma polar.

Dados

$$\begin{aligned} z &= 1 + i = \sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}),\\ w &= 3i = 3(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}), \end{aligned}$$

si queremos calcular el producto zw con la forma binómica, hacemos

$$zw = (1+i)3i = 3i + 3i^2 = 3 - 3i.$$

Con la forma polar

$$\begin{aligned} zw &= 3\sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4})(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2})\\ &= 3\sqrt{2}\left[((\cos\tfrac{\pi}{4}\cos\tfrac{\pi}{2} - \sin\tfrac{\pi}{4})\sin\tfrac{\pi}{2}) + i(\cos\tfrac{\pi}{4}\sin\tfrac{\pi}{2} + \sin\tfrac{\pi}{4}\cos\tfrac{\pi}{2})\right]\\ &= 3\sqrt{2}(\cos(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{2}) + \sin(\tfrac{\pi}{4} + i\tfrac{\pi}{2})) \end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta. \end{aligned}$$

Lo que vale en este ejemplo se puede probar en general.

Teorema de De Moivre: Dados $z, w \in \mathbb{C}$ con expresión polar $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta)$, vale que

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

Equivalentemente, si $z, w \in \mathbb{C}$ tiene expresión exponencial $z = |z|e^{i\alpha}$, $w = |w|e^{i\beta}$, entonces

$$zw = |z||w|e^{i(\alpha+\beta)}.$$

Consecuencias importantes:

- En el ejemplo anterior teníamos

$$\begin{aligned} z &= 1 + i = \sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}),\\ w &= 3i = 3(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}), \end{aligned}$$

  El Teorema de De Moivre nos dice que

$$\begin{aligned} |zw| &= 3\sqrt{2}\\ \arg(zw) &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que zw, respecto de z, se arma estirando tres veces su módulo y girando z un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ en el sentido antihorario.

- Si ahora tenemos

$$z = 2i = 2(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}),$$
$$w = 1 - i = \sqrt{2}(\cos\tfrac{7\pi}{4} + i\sin\tfrac{7\pi}{4}),$$

entonces

$$zw = 2\sqrt{2}(\cos(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{7\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{7\pi}{4})).$$

Es esa la forma polar de zw?

Observamos que

$$\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{7\pi}{4} = \tfrac{9\pi}{4} > 2\pi.$$

Entonces, restando 2π tantas veces como sea necesario hasta obtener algo que esté en $[0, 2\pi)$:

$$\tfrac{9\pi}{4} - 2\pi = \tfrac{\pi}{4} \in [0, 2\pi).$$

Consecuentemente, la forma polar de zw es

$$zw = 2\sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}).$$

En general, como $\arg(z), \arg(w) \in [0, 2\pi)$, se tiene que $arg(zw) \in [0, 4\pi)$, por lo tanto

$$\arg(zw) = \begin{cases} \arg(z) + \arg(w) & \text{si } \arg(z) + \arg(w) < 2\pi \\ \arg(z) + \arg(w) - 2\pi & \text{si } \arg(z) + \arg(w) \geq 2\pi. \end{cases}$$

- Si $z = |z|e^{i\alpha} = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, entonces

$$z^n = |z|^n e^{in\alpha} = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)),$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= |z|(\cos\alpha - i\sin\alpha) \\ &= |z|(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) \\ &= |z|e^{-i\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|}{|z|^2}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)), \qquad \text{si } z \neq 0 \\ &= \frac{1}{|z|}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) \\ &= |z|^{-1}e^{-i\alpha}. \end{aligned}$$

Geométricamente

Ejemplo:

1. Calcular la forma binómica de $(1+i)^{10}$.

   Si multiplicamos $(1+i)$ por sí mismo 10 veces, tardaríamos mucho.

   Buscamos la forma polar de $1+i$:

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}).$$

   Por De Moivre,

$$(1+i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}(\cos(10\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(10\tfrac{\pi}{4})) = 2^5 i(1 + 0i) = 32i,$$

   ya que

$$\frac{10}{4}\pi = 2\pi + \frac{1}{2}\pi \implies \cos\tfrac{10\pi}{4} = \cos\tfrac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\tfrac{10\pi}{4} = \sin\tfrac{\pi}{2} = 1.$$

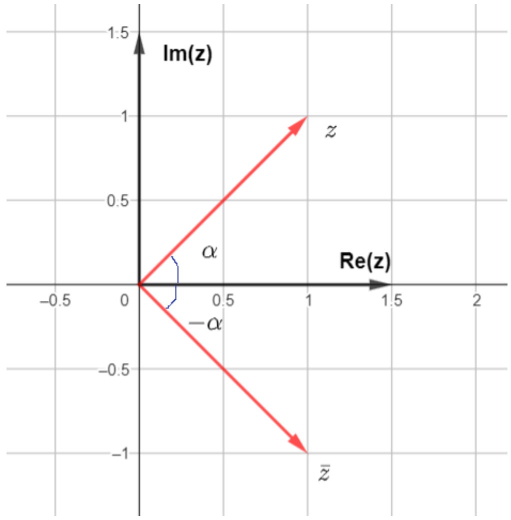

Figura 3. Un número complejo y su conjugado.

2. Calcular la forma binómica y polar de $(1+i)^5(1-i)^7$

   Calculamos la forma polar de cada factor

$$(1+i) = \sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4})$$
$$(1-i) = \sqrt{2}(\cos\tfrac{7\pi}{4} + i\sin\tfrac{7\pi}{4})$$

   y luego de sus potencias

$$(1+i)^5 = (\sqrt{2})^5(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4})$$
$$(1-i)^7 = (\sqrt{2})^7(\cos\tfrac{49\pi}{4} + i\sin\tfrac{49\pi}{4}).$$

   Entonces

$$\begin{aligned}(1+i)^5(1+i)^7 &= (\sqrt{2})^{5+7}(\cos(\tfrac{5\pi}{4} + \tfrac{49\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{5\pi}{4} + \tfrac{49\pi}{4}))\\ &= (\sqrt{2})^{12}(\cos(\tfrac{54\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{54\pi}{4})\\ &= 2^6(\cos(\tfrac{27\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{27\pi}{2}).\end{aligned}$$

   Como

$$\frac{27}{2} = \frac{3}{2} + 12$$

   entonces

$$\cos\tfrac{27\pi}{2} = \cos(12\pi + \tfrac{3}{2}\pi) = \cos\tfrac{3\pi}{2} = 0$$
$$\sin\tfrac{27\pi}{2} = \sin(12\pi + \tfrac{3}{2}\pi) = \sin\tfrac{3\pi}{2} = -1.$$

   Finalmente llegamos a que

$$(1+i)^5(1-i)^7 = 64(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2}) = -64i.$$

3. Resolución de ecuaciones

Vimos ya como resolver ecuaciones lineales y cuadráticas en $\mathbb{C}$.

¿Qué hacemos si tenemos que resolver $z^3 = 1$ en $\mathbb{C}$? En $\mathbb{R}$ sabemos que hay una única solución dada por $z = 1$. Para encontrar las soluciones en $\mathbb{C}$ usamos la forma polar y buscamos

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad \text{con } \alpha \in [0, 2\pi)$$

que verifique $z^3 = 1$. Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$(|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha))^3 = 1.$$

Usando De Moivre

$$|z|^3(\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha) = 1.$$

El 1 se puede escribir como $1(\cos 0 + i \sin 0)$. Entonces

$$|z|^3(\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha) = 1(\cos 0 + i \sin 0)).$$

El módulo y el argumento caracterizan a un número complejo, por lo que en la igualdad anterior, deben coincidir. Debe ser

- $|z|^3 = 1$,
- $3\alpha = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{N}_0$.

La última igualdad es porque $\arg(3z) = 3\arg(z) - 2k\pi$ para algún $k = 0, 1, 2$.

Resolviendo estas dos ecuaciones nos da que

- $|z| = 1$
- $3\alpha = 2k\pi$ con $k = 0, 1, 2$ de donde $\alpha = \frac{2}{3}k\pi$.

Reconstruyendo los z nos quedan 3 soluciones dadas por

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad \text{con } |z| = 1, \quad \alpha = \tfrac{2}{3}k\pi, \text{ siendo } k = 0, 1, 2,$$

es decir

$$\begin{aligned} z_1 &= 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1 \\ z_2 &= 1(\cos \tfrac{2\pi}{3} + i \sin \tfrac{2\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i \\ z_3 &= 1(\cos \tfrac{4\pi}{3} + i \sin \tfrac{4\pi}{3}) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i. \end{aligned}$$

Observar que geométricamente obtenemos un triángulo regular inscripto en una circunferencia de centro 0 y radio 1 con vértices en z_1, z_2 y z_3.

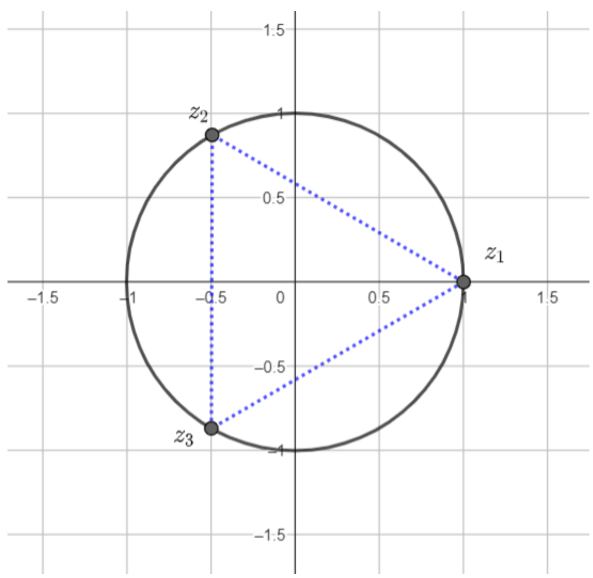

Figura 4. Soluciones de $z^3 = 1$.