Matemática 2 (B)
Segundo Cuatrimestre - 2019

Práctica 2: Resolución de Ecuaciones no Lineales

Método de bisección, Newton y secante.

1. Implementar un programa que reciba como input una función f, dos números a, b, y una tolerancia tol y aplique el método de bisección para aproximar una raíz de f en el intervalo $[a, b]$, garantizando que el error cometido sea menor que tol.

2. Utilizar el método de bisección para calcular $\sqrt[3]{5}$ con un error menor que 10^{-10}.

3. Elegir un intervalo apropiado y utilizar el método de bisección para calcular una raíz de la ecuación:
$$2x = \tan(x)$$
Cuántos pasos hay que hacer para garantizar que el error sea menor que 10^{-5}?

4. El método de regula falsi es similar al método de bisección. La única diferencia es que se cambia el punto medio por el punto de corte del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ con el eje de las abscisas.

   a) Implementar un programa que utilice este método
   b) Para la función $f(x) = x^2 - 5$ comparar los resultados obtenidos con bisección y regula falsi. Cuál es mejor?

5. Implementar un programa que reciba como input una función f, su derivada f' y un punto inicial x_0 y aplique el método de Newton-Raphson para buscar una raíz de f a partir de x_0.

6. El método de la secante es un método que, a diferencia de Newton-Raphson, evita calcular la derivada de una función utilizando rectas secantes. Este método parte de dos puntos iniciales x_0 y x_1, el siguiente punto x_2 es el punto de corte de la recta que pasa por $(x_0; f(x_0))$ y $(x_1; f(x_1))$ y el eje de abscisas. En el siguiente paso los dos puntos que se toman son x_1 y x_2 y así sucesivamente. Este método no siempre converge. Su convergencia es más lenta que el método de Newton-Raphson aunque a cambio los cálculos son más simples.

   a) Implementar un programa que reciba como input una función f y dos puntos x_0 y x_1 y aplique el método de la secante para buscar una raíz de f con datos iniciales x_0 y x_1.
   b) Para la función $f(x) = x^2 - 5$ comparar los resultados obtenidos con el método de la secante y el de Newton-Raphson. Cuál es mejor?

7. Resolver las ecuaciones

   a) $e^{-x} + x^2 - 3\sin(x) = 0$,

b) $e^{|x|} = \arctan(x)$,

c) $x^{15} - 2 = 0$

utilizando los métodos anteriores. Comparar cómo se comportan y decidir cuál tiene la convergencia más rápida ?

8. *a*) Usando el método de bisección y el de Newton-Raphson calcular la solución de $e^{x^2+x+1} - e^{x^3} - 2 = 0$ en el intervalo $[-0.3, 1.8]$ con error menor que 10^{-10}.

   b) Buscar la solución de la ecuación $\tan(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Métodos de punto fijo, métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

9. Sea $\phi(x) = (\frac{x^2}{2} + 2)^{1/2}$. Mostrar que para cualquier intervalo acotado I, existe $0 \leq \gamma < 1$ tal que $|\phi'(x)| \leq \gamma < 1$ para $x \in I$. Probar que el método de punto fijo converge a una solución en forma incondicional, es decir, para cualquier punto inicial.

10. Estudiar numéricamente las iteraciones de $\phi(x) = \lambda x(1 - x)$ para $x_0 = 0.3$, en los casos $\lambda = 0.9, 2.5, 3.2, 3.56, 3.9$.

11. Implementar un programa que reciba como input una matriz A, un vector b y un vector inicial x_0 y aplique el método de Jacobi y otro que aplique el método de Gauss-Seidel para la resolución de un sistema lineal $Ax = b$, con las siguientes condiciones:

    a) que finalice si el método se estaciona,

    b) que finalice con una advertencia si se excede cierto tope de iteraciones,

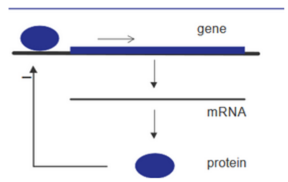
    c) que al inicio del programa calcule el radio espectral

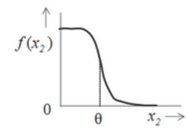
12. Decidir para cada uno de los siguientes sistemas, si los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel son convergentes. En caso afirmativo usarlos para resolver el sistema. Si ambos métodos convergen, determinar cuál converge más rápido. ¿Es la matriz del sistema diagonal dominante?.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

13. El siguiente es un Sistema transcripcional en donde la proteina inhibe (reprime) su propia producción, la variable x representa la concentración de mARN y la variable y representa la concentración de proteína

$$\begin{cases} \dot{x} = \kappa_1 f(y) - \gamma_1 x \\ \dot{y} = \kappa_2 x - \gamma_2 y \end{cases}$$





donde $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ son constantes que representan la tasa de producción y $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ son constantes que representan la tasa de degradación. La no linealidad viene dada por la función $f(y) = \dfrac{\theta^n}{\theta^n + y^n}$, con $\theta > 0$

Considerar $\kappa_1 = 2, \kappa_2 = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = 1, \theta = 1$ y $n = 0.5$. Empleando un método de punto fijo aproximar el estado estacionario del sistema.