Clase 3: Ecuaciones de Cauchy-Riemann

16 de agosto de 2016

1. Introducción

Consideramos una función $f : U \to \mathbb{C}$ (donde U es un abierto de $\mathbb{C}$) que queremos estudiar cerca de un punto $z_0 \in U$. Para esto podemos usar la noción de $\mathbb{C}$-derivada que introdujimos en el capítulo anterior: f es $\mathbb{C}$-derivable en z_0 si existe $\alpha \in \mathbb{C}$ y una función $\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, tales que

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + h\varepsilon(h) \tag{1}$$

En este caso notamos $f'(z_0) := \alpha$.

Para todo $z \in U$, $f(z)$ es un numero complejo que podemos por lo tanto escribir como «parte real + i.parte imaginaria» o sea

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad z = x + iy.$$

Note bien que las funciones u y v, la parte real e imaginaria de f, son funciones a valores <u>reales</u>.

Examinando las partes reales e imaginarias de ambos miembros de (1), vamos a ver que la $\mathbb{C}$-derivabilidad de f en $z_0 = x_0 + iy_0$ es equivalente a la diferenciabilidad de u y v en (x_0, y_0) con una condición extra sobre las derivadas parciales primeras de u y v en este punto. Este resultado, conocido como teorema de Cauchy-Riemann, es uno de los resultados basicos del analisis complejo y se debe conocerse sí o sí.

Antes de ver el enunciado preciso de este resultado, recordemos en la siguiente proposición la noción de diferenciabilidad para una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ vista en análisis I:

Proposición 1.1. *Una función $w : U \to \mathbb{R}$ (U es un abierto de $\mathbb{R}^2$) es diferenciable en $(x_0, y_0) \in U$ si existen $a, b \in \mathbb{R}$ y una función $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\lim_{k,l\to 0} \varepsilon(k,l)/\sqrt{k^2+l^2} = 0$, tales que*

$$w(x_0 + k, y_0 + l) = w(x_0, y_0) + ak + bl + \varepsilon(k, l). \tag{2}$$

En este caso a y b son las derivadas parciales de f en (x_0, y_0), es decir:

$$a = \partial_x f(x_0, y_0), \qquad b = \partial_y f(x_0, y_0).$$

Enunciemos ahora el teorema de Cauchy-Riemann:

Teorem 1.1. *Sea $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$, donde U es un abierto de $\mathbb{C}$ y $z_0 = x_0+iy_0 \in U$. Entonces f es $\mathbb{C}$-derivable en z_0 con $f'(z_0) = a+ib$ si y solo si $u, v : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables en (x_0, y_0) con*

$$\begin{aligned} \partial_x u(x_0, y_0) &= \partial_y v(x_0, y_0) = a, \\ \partial_y u(x_0, y_0) &= -\partial_x v(x_0, y_0) = -b. \end{aligned} \tag{3}$$

En particular

$$f'(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0). \tag{4}$$

Las relaciones (3) *se conocen como «ecuaciones de Cauchy-Riemann».*

Demostración. La prueba de este teorema consiste simplemente en reescribir (1) en termino de parte real e imaginaria. Escribimos $\alpha = a + ib$, $h = k + il$, por lo que $\alpha h = ak - bl + i(al + bk)$, y $\varepsilon(h) = \varepsilon_1(h) + i\varepsilon_2(h)$. Recordando que dos numeros complejos son iguales ssi tienen misma parte real y misma parte imaginaria, obtenemos que (1) es equivalente a

$$u(x_0 + k, y_0 + l) = u(x_0, y_0) + ak - bl + \underbrace{k\varepsilon_1(k, l) - l\varepsilon_2(k, l)}_{=:\tilde{\varepsilon}(k,l)}, \tag{5}$$

$$v(x_0 + k, y_0 + l) = v(x_0, y_0) + bk + al + \underbrace{k\varepsilon_2(k, l) + l\varepsilon_1(k, l)}_{=:\hat{\varepsilon}(k,l)}. \tag{6}$$

Note que la función $\tilde{\varepsilon}(k, l) := k\varepsilon_1(k, l) - l\varepsilon_2(k, l)$ cumple que

$$\frac{\tilde{\varepsilon}(k, l)}{\sqrt{k^2 + l^2}} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + l^2}}\varepsilon_1(k, l) - \frac{l}{\sqrt{k^2 + l^2}}\varepsilon_2(k, l)$$

por lo que

$$\left|\frac{\tilde{\varepsilon}(k,l)}{\sqrt{k^2+l^2}}\right| \leq |\varepsilon_1(k,l)| + |\varepsilon_2(k,l)| \to 0 \qquad \text{cuando } k,l \to 0.$$

Luego, si recordamos la definicion de diferenciabilidad vista en la proposicion 2, (5) es equivalente a decir que u es diferenciable en (x_0, y_0) con $\partial_x u(x_0, y_0) = a$ y $\partial_y u(x_0, y_0) = -b$. Vemos de la misma forma que (6) es equivalente a decir que v es diferenciable en (x_0, y_0) con $\partial_x v(x_0, y_0) = b$ y $\partial_y v(x_0, y_0) = a$. Eso concluye la prueba. □

1.1. Ejemplos de aplicaciones

Ejemplo 1.1. *Consideramos la función*

$$f(z) = e^x \cos(y) + ie^x \operatorname{sen}(y), \qquad z = x + iy. \tag{7}$$

Veamos que f es entera con $f' = f$. Identifiquemos primero la parte real e imaginaria de f:

$$f(z) = \underbrace{e^x \cos(y)}_{u(x,y)} + i \underbrace{e^x \operatorname{sen}(y)}_{v(x,y)}$$

Obviamente $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciónes C^∞. Además

$$\begin{aligned}
\partial_x u(x,y) &= \partial_x(e^x \cos(y)) = e^x \cos(y),\\
\partial_y u(x,y) &= \partial_y(e^x \cos(y)) = -e^x \operatorname{sen}(y),\\
\partial_x v(x,y) &= \partial_x(e^x \operatorname{sen}(y)) = e^x \operatorname{sen}(y),\\
\partial_y v(x,y) &= \partial_y(e^x \operatorname{sen}(y)) = e^x \cos(y),
\end{aligned}$$

Luego para todo $(x, y) \in \mathbb{C}$,

$$\partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y) \qquad y \qquad \partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y).$$

En vista del teorema de Cauchy-Riemann, podemos entonces concluir que f es $\mathbb{C}$-derivable en cualquier punto $z = x + iy \in \mathbb{C}$, o sea f es entera, con

$$f'(z) = \partial_x u(x,y) + i\partial_x v(x,y) = e^x \cos(y) + ie^x \operatorname{sen}(y) = f(z).$$

Volvamos a examinar la función $f(z) := \bar{z}$. Ya vimos que esta función no es $\mathbb{C}$-derivable en ningun punto. Podemos obtener este resultado usando el teorema de Cauchy-Riemann. Tenemos

$$f(z) = x - iy = \underbrace{x}_{u(x,y)} + i\underbrace{(-y)}_{v(x,y)}$$

Obviamente las funciónes $u(x, y) = x$ y $v(x, y) = -y$ son C^{∞}. Además

$$\partial_x u(x, y) = \partial_x x = 1$$

pero

$$\partial_y v(x, y) = \partial_y (-y) = -1.$$

Luego $\partial_x u(x, y) \neq \partial_y v(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Como no se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (3), podemos concluir que f no es $\mathbb{C}$-derivable en ningun punto.

2. Aplicaciones

2.1. Funciónes holomorfas con derivada nula

Sabemos que si una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable con derivada nula en cada punto de (a, b) entonces f es constante. Note que este resultado es falso si reemplazamos el intervalo (a, b) por una una union de dos intervalos disjuntos. Por ejemplo la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$$

tiene derivada nula en cada punto de $(0, 1) \cup (2, 3)$ pero no es constante. Acá la hipótesis de que la función esta definida sobre un intervalo es decir un conjunto "de un solo pedazo" es fundamental. La generalizacion de este concepto a conjuntos en $\mathbb{R}^n$ es la de conjuntos conexos.

Intuitivamente, un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ se dice conexo si "es de un solo pedazo" en el sentido que no se puede escribirlo como union de dos o mas conjuntos abiertos no vacios:

Definición 2.1. *Un conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *es conexo si cada vez que uno escribe*

$$A = U \cup V$$

con U, V *conjuntos abiertos disjuntos, pasa que* U *o* V *es vacio.*

Por ejemplo, se puede probar que los conjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos.

Vimos en Análisis I una generalización del resultado anterior a funciones de varias variables:

Proposición 2.1. *Consideramos una función* $w : U \to \mathbb{R}$ *donde* U *es un abierto de* $\mathbb{R}^2$. *Si* w *es diferenciable en cada punto de* U *con* $\partial_x w(x,y) = \partial_y w(x,y) = 0$ *para todo* $(x,y) \in U$, *y si* U *es conexo, entonces* w *es constante.*

Otra vez este resultado es falso si sacamos la hipótesis de que U es conexo. Por ejemplo la función

$$w(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B(0,1), \\ 2 & \text{si } x \in B(3,1), \end{cases}$$

es diferenciable en cada punto de $U = B(0,1) \cup B(3,1)$ con derivadas parciales primeras nulas pero no es constante. Note que U no es conexo ya que se puede escribir como union disjunta de dos conjuntos abiertos no-vacios (las bolas $B(0,1)$ y $B(3,1)$).

El resultado análogo para funciones holomorfas viene dado por la siguiente proposición:

Proposición 2.2. *Sea* $f : U \to \mathbb{C}$ *es holomorfa con* $U \subset \mathbb{C}$ *abierto y conexo. Si* $f'(z) = 0$ *para todo* $z \in U$ *entonces* f *es constante.*

Demostración. Escribimos $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Como f es holomorfa en U, sabemos por el teorema de Cauchy-Riemann que u y v son diferenciables en cada punto de U y que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (3) y (4). Luego

$$0 = f'(z) = \partial_x u(x,y) + i\partial_x v(x,y) \qquad \text{para todo } (x,y) \in U$$

o sea

$$\partial_x u(x,y) = \partial_x v(x,y) = 0 \qquad \text{para todo } (x,y) \in U.$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann (3) obtenemos que

$$\partial_x u(x,y) = \partial_y u(x,y) = \partial_x v(x,y) = \partial_y v(x,y) = 0 \qquad \text{para todo } (x,y) \in U.$$

Como U es conexo, deducimos en vista de la prop. 2.1 que u y v son constantes o sea que f es constante. $\square$

2.2. Funciónes holomorfas con parte real constante y variantes

Proposición 2.3. *Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in U$ y si U es conexo entonces f es constante.*

Demostración. Notamos $u, v : U \to \mathbb{R}$ la parte real e imaginaria de f por lo que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Como $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in U$ tenemos $v \equiv 0$. Luego las ecuaciones de Cauchy-Riemann (3) dan

$$\partial_x u(x,y) = \partial_y u(x,y) = 0 \qquad \text{para todo } (x,y) \in U.$$

Como U es conexo, deducimos en vista de la prop. 2.1 que u es constante. Luego f es constante. $\square$

En la práctica se ven algunas variantes de este resultado en los que se reemplaza la hipótesis "$f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in U$' por "$f(z) \in R$ para todo $z \in U$"donde R es una recta dada o "$|f(z)| = 1$ para todo $z \in U$. En cualquier caso, se puede probar que f es constante usando la misma idea que en la prueba anterior.

Note que en estos ejemplos, estamos diciendo que la imagen $f(U)$ de f esta contenido en algún conjunto cerrado (una recta R o el círculo centrado en 0 de radio 1). De hecho se puede probar que si una función f es holomorfa y no-constante en un abierto U entonces su imagen $f(U)$ es un conjunto abierto. La prueba de este resultado es mas compleja.

3. Complementos

3.1. Aplicaciones a la mecánica de los fluidos

3.2. Interpretación geométrica de la $\mathbb{C}$-derivabilidad