MATE IV

Práctica 3

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Funciones Complejas: $f : \Omega \to \mathbb{C}$

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Toda $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se puede escribir como

$$f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$$

a $\Rightarrow f$ le corresponden las funciones $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$, su parte real y parte imaginaria, respectivamente.

Ejemplo 1: • Función exponencial compleja
$f(z) = e^z := e^{x+yi} = e^x\Big(\cos(y) + \operatorname{sen}(y)i\Big)$

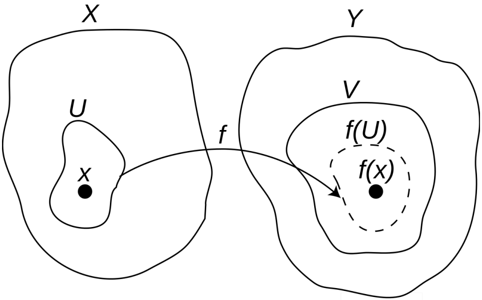
$$= \underbrace{e^x \cos(y)}_{u(x,y)} + \underbrace{e^x \operatorname{sen}(y)}_{v(x,y)} i$$

• $g(z) = z^2 = (x + yi)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + \underbrace{2xy}_{v(x,y)}\ i$

Funciones Continuas

Se dice que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua en $z_0 \in \Omega$ si existe el límite de f cuando z tiende a z_0 y vale $f(z_0)$:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \in \mathbb{C}$$



Es decir, f es continua en z_0 si puntos cercanos a z_0 en el dominio son llevados por f a puntos cercanos a $f(z_0)$

- $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua en Ω si lo es en todo $z \in \Omega$

Teorema 1

Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son continuas en Ω entonces

- $f + g$ es continua en Ω
- $f \cdot g$ es continua en Ω
- $\dfrac{f}{g}$ es continua en $\{z \in \Omega : g(z) \neq 0\}$
- Si además f es continua en $U =$ la imagen de g
  $\Rightarrow f \circ g$ es continua en Ω

Ejemplo 2: • $f(z) = z$ es continua y por el Teorema 1

$$\Rightarrow f(z) = z^2 \text{ es continua } \Rightarrow f(z) = z^3 \text{ es continua etc.}$$

$$\Rightarrow f(z) = z^n \text{ es continua } \forall n$$

• Los polinomios $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ son continuas

Funciones Derivables

Funciones Derivables

Se dice que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable en $z \in \Omega$ si existe el límite del cociente incremental, donde el incremento $\Delta z \in \mathbb{C}$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \in \mathbb{C}$$

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable en Ω si lo es en todo $z \in \Omega$

Ejemplo 3. a) $f(z) = z$ es derivable

- $f(z) = z$ es derivable, es decir, existe $f'(z)$ en todo $\mathbb{C}$ pues

$$f'(z) = z' = \frac{d(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z) - z}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} 1 = 1 \ \forall z \ \checkmark$$

Ejemplo 3. b) $f(z) = z^2$ es derivable

- $f(z) = z^2$ es derivable y existe $f'(z)$ en todo $\mathbb{C}$ pues

$$(z^2)' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} 2z + \Delta z = 2z \checkmark$$

Teorema 2

Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son derivables en Ω entonces

- $f + g$ es derivable en Ω
- $f \cdot g$ es derivable en Ω
- $\dfrac{f}{g}$ es derivable en $\{z \in \Omega : g(z) \neq 0\}$
- Si además f es derivable en $U =$ la imagen de g
  $\Rightarrow f \circ g$ es derivable en Ω

y valen las fórmulas de derivación de las operaciones:

- $f + g$ derivable con $(f + g)' = f' + g'$
- $f \cdot g$ derivable en Ω con $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\dfrac{f}{g}$ derivable con $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ $\forall z : g(z) \neq 0$
- Regla de la Cadena: $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$ ✓

Más Funciones Derivables: Ejemplo 4

• $f(z) = z^3 = z \cdot z^2$ es producto de funciones derivables en todo $\mathbb{C}$, por lo cual es derivable

$$\Rightarrow z^4, \; z^5, \; \ldots z^n \textit{ es derivable } \forall n$$

• Los polinomios y las funciones racionales son derivables en su dominio:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_n z^n$$

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} : \; \forall z : q(z) \neq 0$$

y sus derivadas de se obtienen por las fórmulas usuales, en virtud del teorema 2.

Ejemplo 5: Dominio de Derivabilidad

Determinar el dominio y la región en la cual

$$f(z) = \frac{\pi z^2}{4z^3 - \dfrac{1}{2}} \quad \textit{sea derivable}$$

Sol: $\text{Dom }(f) = \Omega = \{z \in \mathbb{C} : 4z^3 - \frac{1}{2} \neq 0\} = \{z \in \mathbb{C} : z^3 \neq \frac{1}{8}\}$

$$z^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = \frac{1}{8} & \Rightarrow |z| = \frac{1}{2} \\ \\ 3\ arg(z) = 0 + 2k\pi & \Rightarrow \theta_k = \dfrac{2}{3}k\pi \Longrightarrow \theta = 0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\text{Dom }(f) = \Omega$ $= \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{1}{2},\ z \neq \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{4} \right\}$

$\Rightarrow$ f es derivable en Ω por ser cociente de derivables con denominador no nulo. ✓

Además, $\forall\ z \in \Omega$ se puede calcular $f'(z)$ usando las reglas de derivación de las operaciones:

$$\frac{d\,f}{dz}(z) = \frac{d}{dz}\left[\frac{\pi z^2}{4z^3 - \frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{2\pi z(4z^3 - \frac{1}{2}) - \pi z^2 \cdot 12z^2}{(4z^3 - \frac{1}{2})^2} \checkmark$$

Teorema 3: Cauchy-Riemann

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ entonces

f derivable en un punto $z = x + yi \iff u, v$ diferenciables en el mismo (x, y) y valen las identidades

$$\boxed{u_x = v_y; \;\; u_y = -v_x \;\; en \; (x, y)}$$

- Además, en cada z donde valen estas condiciones:

$$\boxed{f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)}$$

- En este caso, también $\Longrightarrow f$ continua en el mismo z.

Ejemplo 6: Descartar derivabilidad

Analizar la derivabilidad de $f(z) = \overline{z}$

Solución:

$f(z) = \overline{z}$ no es derivable para ningún $z \in \mathbb{C}$

pues $f(z) = \overline{z} = x - yi$

$$u_x = 1 \neq -1 = u_y \quad \text{cualquiera sea} \quad z \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ No valen las identidades de C - R en ningún $z \in \mathbb{C}$

Falla una de las 4 condiciones de C - R

$\Rightarrow$ No existe $f'(z)$ para ningún $z \in \mathbb{C}$

Ejemplo 7

Analizar la derivabilidad de $f(z) = e^z$

Solución: Veamos que $f(z) = e^z$ es derivable en todo $\mathbb{C}$:

$$f(z) = e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + \operatorname{sen} y\, i)$$

$$= \underbrace{e^x \cos y}_{=u(x,y)} + \underbrace{e^x \operatorname{sen} y}_{=v(x,y)}\ i$$

$$\Longrightarrow u(x,y) = e^x \cos y; \quad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$$

- u y v diferenciables para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$
- $C - R\ valen\ pues$ $\begin{cases} u_x(x,y) = e^x \cos y = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) = e^x(-\operatorname{sen} y) = -v_x(x,y) \end{cases}$
- Para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$

$f'(z) = u_x(x,y) + v_x(x,y)i = e^x \cos y + e^x \operatorname{sen} y\, i = e^z$

$f(z) = e^z$ es derivable en todo $\mathbb{C}$

$f(z) = e^z$ es derivable en todo $\mathbb{C}$ y $f'(z) = e^z$ ✓

Ejemplo 8: Descartar derivabilidad de $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Analizar la derivabilidad de

$$f(z) = f(x+yi) = x^3 + i(1-y)$$

Solución: Tenemos $\begin{cases} u(x,y) = x^3 \\ v(x,y) = 1 - y \end{cases}$

Supongamos que f sea derivable en $z \in \mathbb{C}$, luego, por Cauchy - Riemann, en el mismo $z = x + yi$ debe verificarse

$$3x^2 = u_x = v_y = -1, \ \textit{absurdo}$$

luego esta identidad no vale para ningún $z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ no existe $f'(z) = 0$ para ningún $z \in \mathbb{C}$ ✓

Ejemplo 9. a)

Analizar la derivabilidad de

$$f(z) = |z|^2$$

$$f(z) = x^2 + y^2 = u(x,y) + iv(x,y) \Longrightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 + y^2 \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow u, v$ diferenciables

Pero ¿vale Cauchy-Riemann? ¿para qué valores de z?

$u(x,y)$ y $v(x,y)$ cumplen las identidades si sólo si

$$\begin{cases} 2x = u_x(x,y) = v_y(x,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \\ \\ 2y = u_y(x,y) = -v_x(x,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

- $f(z) = |z|^2$ es derivable sólo en $z = 0$ y $f'(0) = 0$
- $f'(z)$ no existe en ningún otro punto de $\mathbb{C}$ ✓

Ejemplo 9. b)

Hallar los $z \in \mathbb{C}$: $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ sea derivable si los hay.

Solución:

$$|z| = u(x,y) + iv(x,y) \Longrightarrow \begin{cases} u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ v es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, pero $u(x,y)$ es diferenciable sólo para $(x,y) \neq (0,0)$, donde es composición de diferenciables.

Atención : *no existen las derivadas parciales de u en* $(0,0)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \pm 1 \textit{ dependiendo de que } h \to 0^{\pm}$$

$$\Longrightarrow u \textit{ no es diferenciable en } (0,0)$$

Por Cauchy - Riemann, $f(z)$ no es derivable en $z=0$

• Pero u sí es diferenciable para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ por ser composición de diferenciables.

• ¿Valen las identidades de Cauchy-Riemann para algún $(x, y) \neq (0, 0)$?

• $u(x, y)$ y $v(x, y)$ cumplen las identidades si sólo si

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = u_x(x, y) = v_y(x, y) = 0 & \Longrightarrow \quad x = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = u_y(x, y) = -v_x(x, y) = 0 & \Longrightarrow \quad y = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (x, y) = (0, 0), \ \textit{absurdo}!$$

$\Longrightarrow f(z) = |z|$ no es derivable en ningún $z \in \mathbb{C}$ ✓

Ejemplo 10. Las identidades de C - R no son condiciones suficientes

Probar que valen las identidades de Cauchy - Riemann en $z = 0$ pero $f(z)$ no es derivable en $z = 0$:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\overline{z})^2}{z} & si \quad z \neq 0 \\ 0 & si \quad z = 0 \end{cases}$$

Solución: • f es una función partida $\Rightarrow$ analizar $z = 0$ por definición, pero necesitamos conocer de u, v cerca de $z = 0$:

• Si $z \neq 0 \Rightarrow$ usemos $z\overline{z} = |z|^2$:

$$f(z) = \frac{(\overline{z})^2}{z} = \frac{(\overline{z})^3}{z\overline{z}} = \frac{(\overline{z})^3}{|z|^2}$$

CA: $(\overline{z})^3 = (x - yi)^3 = (x - yi)^2(x - yi)$

$$= (x^2 - y^2 - 2xyi)(x - yi) = x^3 - 3xy^2 + i(y^3 - 3x^2y)$$

- $Si\ z \neq 0:\ f(z) = \dfrac{(\overline{z})^3}{|z|^2} = \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} + i\left(\dfrac{y^3 - 3x^2y}{x^2+y^2}\right)$

$$= u(x,y) \ + i\ v(x,y)\ \forall (x,y) \neq (0,0)$$

- Veamos que se verifican $u_x = v_y,\ u_y = -v_x$ en $z = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(0,h) - v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1 \ \checkmark$$

- $Si\ z \neq 0:\ f(z) = \dfrac{(\overline{z})^3}{|z|^2} = \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} + i\left(\dfrac{y^3 - 3x^2y}{x^2+y^2}\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = -\lim_{h\to 0} \frac{v(h,0) - v(0,0)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Por lo tanto, valen las identidades de Cauchy - Riemann en $z = 0$ ✓

Pero u no es diferenciable en $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{u(x,y) - \overbrace{u_x(0,0)}^{=1}x - \overbrace{u_y(0,0)}^{=0}y - \overbrace{u(0,0)}^{=0}}{||(x,y)||}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-3xy^2 - x(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cancel{x^3}-3xy^2 - x(\cancel{x^2}+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}$$

u no es diferenciable en $z = 0$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-4xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = L$$

Veamos usando trayectorias que el límite anterior no existe:

- $x = 0$:

$$L = \lim_{y\to 0} \frac{0}{|y|^3} = 0$$

- $y = x$:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{-4x^3}{2\sqrt{2}x^2|x|} = -\sqrt{2} \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} \text{ que no existe}$$

$$\Rightarrow u \text{ no es diferenciable en } z = 0$$

Concluímos que $f(z)$ no es derivable en $z = 0$ ✓

Funciones holomorfas

Funciones holomorfas

Definición: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto; $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa si f es derivable en Ω, es decir, si $f'(z)$ existe para todo $z \in \Omega$

- $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa en un punto $z_0 \in \Omega$ si lo es en un abierto que contiene a z_0.

- No tiene sentido hablar de f holomorfa en un punto aislado

- Sólo podemos hablar de f holomorfa en un dominio abierto

$f(z) = e^z$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$

- $f(z) = e^z$ es derivable en todo $\mathbb{C}$ y $f'(z) = e^z$

$\Longrightarrow f(z) = e^z$ es HOLOMORFA en $\mathbb{C}$.

Teorema 4: Funciones holomorfas

Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son holomorfas en el abierto Ω entonces

- $f + g$ es holomorfa en Ω
- $f \cdot g$ es holomorfa en Ω
- $\dfrac{f}{g}$ es holomorfa en $\{z \in \Omega : g(z) \neq 0\}$

es decir

- $f + g$ derivable con $(f + g)' = f' + g'$ en Ω.
- $f \cdot g$ derivable en Ω con $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ en Ω.
- $\dfrac{f}{g}$ derivable en $\{z \in \Omega : g/z) \neq 0\}$ con
  $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ en Ω.

Ejemplo 11

Determinar el dominio y la región en la cual

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{4z^3 - \frac{1}{2}} \quad \textit{sea holomorfa}$$

Sol: $\text{Dom}\ (f) = \Omega = \{z \in \mathbb{C} : 4z^3 - \frac{1}{2} \neq 0\} = \{z \in \mathbb{C} : z^3 \neq \frac{1}{8}\}$

$$z^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = \frac{1}{8} & \Rightarrow |z| = \frac{1}{2} \\ 3\ arg(z) = 0 + 2k\pi & \Rightarrow \theta_k = \frac{2}{3}k\pi \Longrightarrow \theta = 0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Dom (f)= $\left\{z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{1}{2},\ z \neq \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{4}\right\}$

$\Rightarrow$ f es holomorfa en Dom $(f) = \Omega$ por ser cociente de holomorfas con denominador no nulo.

Ejemplo 12: Cociente de funciones holomorfas

Hallar el abierto Ω más grande en el cual f sea holomorfa

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

Solución: $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : e^z \neq 1\}$

- $1 = e^z \Rightarrow 1 = |e^z|$
- $1 = e^{x+yi} = e^x(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)) \Rightarrow 1 = |e^z| = e^x \Rightarrow x = 0$
- Comparemos la parte imaginaria de ambos miembros:

$$0 = \mathrm{sen}(y) \Rightarrow y = k\pi$$

- Evaluemos el coseno (la parte real) en estos valores:

$$1 = \cos(y) = \cos(k\pi) = (-1)^k \Rightarrow k\ par,\ k = 2n : n \in \mathbb{Z}$$

En efecto,

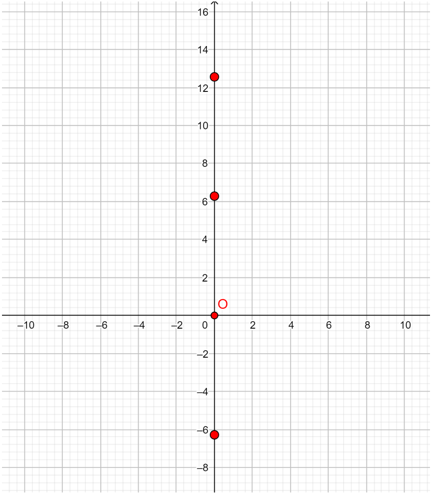
$$e^{2n\pi i} = \cos(2n\pi) + i\,\mathrm{sen}(2n\pi) = 1 \;\forall n \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}\}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{e^z - 1} \text{ es holomorfa en } \Omega$$

por ser cociente de holomorfas

con denominador no nulo en Ω ✓



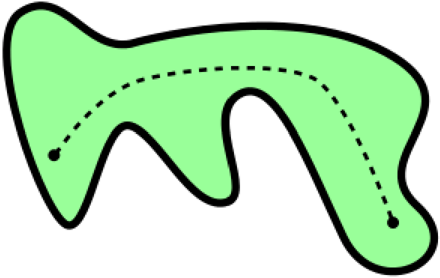
Los puntos fuera del dominio son $\cdots - 2\pi i,\ 0,\ 2\pi i,\ 4\pi i, \ldots$

Funciones Holomorfas en Conjuntos Conexos

Conjuntos Arcoconexos

Estudiemos ahora funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y conexo.

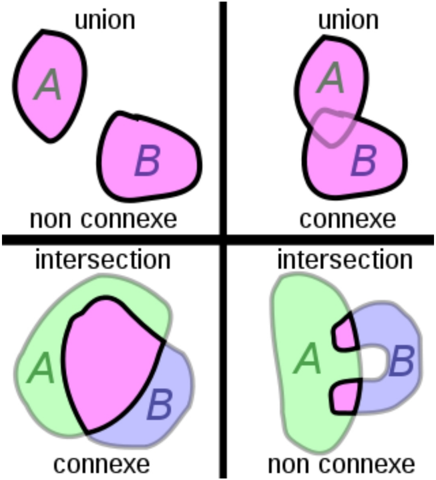
$\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice arcoconexo o conexo por curvas: si todo par de puntos de Ω se puede unir por una curva contenida en Ω



$\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y conexo $\Leftrightarrow$ es arcoconexo

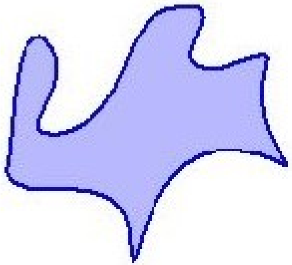
Conjuntos Arcoconexos

La unión y la intersección de arcoconexos
no necesariamente
es arcoconexo



Conjuntos Conexos

En general, un conjunto se dice conexo si no se puede cubrir con dos abiertos disjuntos, no vacíos:



Conexo

No Conexo

Ejemplo 13. Funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Probar que si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es holomorfa, entonces f es constante

Dem: Sea f holomorfa en $U \Rightarrow f(z)$ es derivable en U

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow$ u, v verifican Cauchy - R $\Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

Pero, la imagen de f está contenida en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$la parte imaginaria es cero:

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in \mathbb{R} \Rightarrow v(x,y) = 0 \ \forall (x,y)$

$$\Rightarrow \boxed{u_x(x,y) = v_y(x,y) = 0, \ u_y(x,y) = -v(x,y) = 0 \ \forall (x,y)}$$

Es decir que las dos derivadas parciales de u son cero

$\Rightarrow u = C$ *es constante*, $v = 0 \ \Rightarrow f = C$ *es constante* ✓

¿Es necesaria la hipótesis de conexión?

Contraejemplo: Consideremos $\Omega = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$:
$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z + 5| < 15\}$, $\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 5| < 15\}$

y la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$:

$$f(z) = \begin{cases} 1 & z \in \mathcal{U} \\ -1 & z \in \mathcal{V} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f holomorfa en Ω pero no es constante en Ω
aunque toma sólo valores en $\mathbb{R}$.

Es decir, el resultado no necesariamente vale

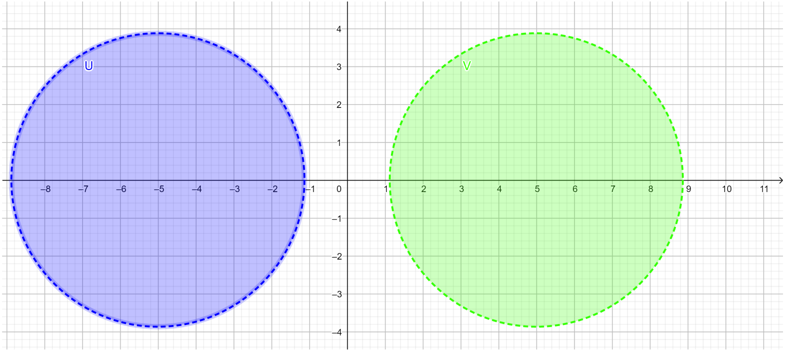
si $\Omega = Dom(f)$ no es conexo

Contraejempo si $\Omega = Dom(f)$ no es conexo

Atención: El anterior sirve también de contraejemplo para mostrar que el siguiente enunciado deja de ser válido sin la hipótesis de Ω conexo:

$|f|$ constante en Ω abierto y conexo $\Rightarrow$ f es constante en Ω.

$\Omega = Dom(f)$ no es conexo



$\mathcal{U}$ $\mathcal{V}$

$\Omega = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$

Observación: $\Rightarrow f$ es constante en cada una de las dos componentes conexas $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ ✓

Práctica 3, ejercicio 12. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Probar

- $Re(f)$ constante en $\Omega \Rightarrow f$ es constante en Ω.
- $Im(f)$ constante en $\Omega \Rightarrow f$ es constante en Ω.
- $|f|$ constante en $\Omega \Rightarrow f$ es constante en Ω.
- $Arg(f)$ constante en $\Omega \Rightarrow f$ es constante en Ω.

Demostración: como el ejemplo 13.

Práctica 3, ejercicio 11. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Probar que

- Si también $\overline{f}$ es holomorfa en $\Omega \Rightarrow f$ es constante.
- Si $f' = 0 \Rightarrow f$ es constante en Ω.
- Si g es holomorfa en Ω y $g' = f' \Rightarrow f - g$ es constante en Ω.

Demostración: como el ejemplo 13.

Resolución de Práctica 3, Ejercicio 12. c

Si Ω es abierto y conexo, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $|f|$ es constante, entonces f es constante en Ω.

Solución: existe $C \geq 0$:

$$C = |f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)} \; \forall z \in \Omega$$

Si $C = 0 \Longrightarrow f(z) = 0$ ó bien $\overline{f(z)} = 0$ para cada $z \in \Omega$:

- Si $0 = f(z) = w = u + iv \Longrightarrow u(x,y) = 0 = v(x,y)$ $\Longrightarrow \overline{f(z)} = 0 = f(z)$ para cada $z \in \Omega$
- Idem si empezamos con $\overline{f(z)} = 0$

En cualquiera de los dos casos $\Longrightarrow f(z) = 0 \; \forall z \in \Omega$

Ej 12. c

Si $C > 0 \Longrightarrow f(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega \Longrightarrow \overline{f(z)} = \dfrac{C}{f(z)}$ holomorfa por ser cociente de holomorfas

$$\Longrightarrow U(z) = Re\ f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)}) \ \forall z \in \Omega$$

es combinación lineal de holomorfas, por lo tanto

$U(z)$ es holomorfa pero toma sólo valores en $\mathbb{R}$

Ej 12. c

$$\Longrightarrow U(z) = Re\ f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)})\ \forall z \in \Omega$$

es holomorfa con parte imaginaria cero

Atención: su parte imaginaria no es V

Como en el ejemplo 13, las identidades de Cauchy - Riemann implican

$$\Longrightarrow U_x = \frac{\partial}{\partial y}0 = 0 = -\frac{\partial}{\partial x}0 = U_y \Longrightarrow U\ es\ constante\ en\ \Omega$$

$$Aplicando\ C - R\ a\ f = U + iV \Longrightarrow V\ es\ constante\ en\ \Omega$$

$$\Longrightarrow \boxed{f\ es\ constante\ en\ \Omega}\ \checkmark$$