MATEMÁTICA 4
PRÁCTICA 9

Transformada de Laplace: Ecuaciones Diferenciales

Patricia Jancsa

Viernes 25/11/2022

Ecuaciones Diferenciales

Propiedades: Sea y de tipo exponencial

$$\boxed{L[y'] = sL[y] - y(0), \qquad L[y''] = s^2L[y] - sy(0) - y'(0)}$$

Sea h de orden exponencial α

$$\boxed{L[t^n \cdot h(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[h(t)] : \ s > \alpha}$$

Si $F(t) = \int_0^t y(x)dx \Rightarrow F(0) = 0$ y por el Teorema Fundamental del Cálculo vale $F'(t) = y(t)$, luego

$$L\left[\int_0^t y(x)dx\right] = \frac{1}{s} L[y]$$

1) Resolver $y'' + 2y' + y = 25\, e^{4t}$: $y(0) = 1 = y'(0)$

$$\Rightarrow L[y'' + 2y' + y] = 25\, L[e^{4t}] = \frac{25}{(s-4)}$$

$$= s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) + 2(sL[y] - y(0)) + L[y]$$

$$= (s^2 + 2s + 1)L[y] - s - 1 - 2$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2s + 1)L[y] = s + 3 + \frac{25}{(s-4)}$$

$$\Rightarrow L[y] = \left(s + 3 + \frac{25}{(s-4)}\right)\frac{1}{(s^2 + 2s + 1)}$$

$$\Rightarrow L[y] = \left(s + 3 + \frac{25}{(s-4)}\right)\frac{1}{(s^2+2s+1)}$$

Fracciones Simples:

$$= \frac{s+3}{(s^2+2s+1)} + \frac{25}{(s-4)(s^2+2s+1)}$$

$$= \frac{s+3}{(s+1)^2} + \frac{A}{(s-4)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+1)^2} : A, B, C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{(s+1)}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s-4} - \frac{1}{(s+1)} - \frac{5}{(s+1)^2}$$

$$= -\frac{3}{(s+1)^2} + \frac{1}{s-4}$$

$$= -3L[t\ e^t] + L[e^{4t}] \Rightarrow \boxed{y(t) = -3t\ e^t + e^{4t}}$$

CA:

$$\frac{1}{(s+1)^2} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right) = -\frac{d}{ds}\left(L[e^t]\right) = L[t\ e^t]$$

También así: $\dfrac{1}{(s+1)^2} = L[t](s+1) = L[t\ e^{-t}]$

Ej. 2) Resolver la ecuación diferencial - integral:

$$y'(t) + 4y(t) + 4\int_0^t y(x)dx = 4t^3, \; y(0) = 1$$

Solución: apliquemos la propiedad $L\left[\int_0^t y(x)dx\right] = \frac{1}{s}L[y]$

$$\Longrightarrow L[y'] + 4L[y] + \frac{4}{s}L[y] = 4\frac{3!}{s^4}$$

$$= sL[y] - 1 + 4L[y] + \frac{4}{s}L[y] = L[y]\left(s + 4 + \frac{4}{s}\right) - 1 = L[y]\left(\frac{s^2+4s+4}{s}\right) - 1$$

$$\Longrightarrow L[y] = \left(\frac{24}{s^4} + 1\right)\frac{s}{(s^2+4s+4)}$$

$$\Longrightarrow L[y] = \left(\frac{24+s^4}{s^4}\right)\frac{s}{(s^2+4s+4)} = \left(\frac{24+s^4}{s^3}\right)\frac{1}{(s+2)^2}$$

Fracciones Simples: $= \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s^2} + \dfrac{C}{s^3} + \dfrac{D}{s+2} + \dfrac{E}{(s+2)^2}$

$$= \frac{(As^2+Bs+C)(s+2)^2 + D(s+2)s^3 + Es^3}{s^3(s+2)^2}$$

- $s = 0 \quad \Rightarrow 24 = 4C \quad \Rightarrow C = 6$
- $s = -2 \quad \Rightarrow 40 = -8E \quad \Rightarrow E = -5$
- $1s^4 = (A+D)s^4 \quad \Rightarrow 1 = A + D$
- $0s^3 = (4A + B + 2D + E)s^3 \quad \Rightarrow 0 = 4A + B + 2D + E$
- $0s^2 = (4A + 4B + C)s^2 \quad \Rightarrow 0 = 4A + 4B + C$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 24 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} & 1 & \frac{1}{8} \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & -1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \\ -6 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -6 \\ 6 \\ -\frac{7}{2} \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow L[y(t)] = \frac{9}{2s} - \frac{6}{s^2} + \frac{6}{s^3} - \frac{7}{2(s+2)} - \frac{5}{(s+2)^2} \quad (*)$$

$$\Longrightarrow y(t) = \frac{9}{2} - 6t + 3t^2 - \frac{7}{2}e^{-2t} - 5te^{-2t} \checkmark$$

Cálculo Auxiliar: $(*) = -\dfrac{5}{(s+2)^2}$

$$= 5\frac{d}{ds}\frac{1}{(s+2)} = 5\frac{d}{ds}L[e^{-2t}] = L[-5te^{-2t}]$$

por la propiedad

$$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}L[h(t)] = L[t^n \cdot h(t)] \Longrightarrow \frac{d}{ds}L[h(t)] = L[-t \cdot h(t)]$$

3) Determinar la función $y(t)$ solución de la ecuación

$$y'(t) + y(t) = -\operatorname{sen}(t) + \int_0^t \operatorname{sen}(t-x)y(x)\,dx : \; y(0) = 1$$

Solución: Apliquemos Transformadas

$$s\,L[y] - y(0) + L[y] = -L[\operatorname{sen}(t)] + L[\operatorname{sen}(t) \star y(t)]$$

$$= -\frac{1}{s^2+1} + L[\operatorname{sen}(t)] \cdot L[y]$$

$$= -\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \cdot L[y]$$

entonces

$$L[y]\left(s+1-\frac{1}{s^2+1}\right)=1-\frac{1}{s^2+1}$$

$$\iff L[y]\frac{\left[(s+1)(s^2+1)-1\right]}{s^2+1}=\frac{s^2}{s^2+1}$$

$$\iff L[y]\left[(s+1)(s^2+1)-1\right]=s^2$$

$$\iff L[y]=\frac{s^2}{s^3+s^2+s}=\frac{s}{s^2+s+1}$$

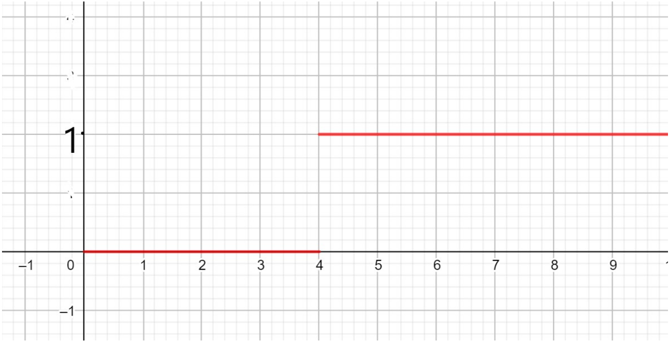
$$L[y] = \frac{s}{s^2+s+1} = \frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}}{\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= L\left[e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{3}}L\left[e^{-t/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \checkmark$$

Función de Salto Unitario o de Heaviside



$$H_c(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leqslant t < c \\ 1 & si \quad c \leqslant t \end{cases} \Rightarrow L[H_c] = \frac{e^{-cs}}{s} \; \forall s > 0$$

Transformada de L de Funciones Partidas

Si $F(t) = H_c(t)f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leqslant t < c \\ f(t) & si \quad c \leqslant t \end{cases}$

$$\Rightarrow L[H_c(t)\,f(t)](s) = e^{-cs}L[f(t+c)](s)\ \forall s > 0$$

La misma propiedad puede expresarse en la forma

$$L[H_c(t)\,f(t-c)](s) = e^{-cs}L[f(t)](s)\ \forall s > 0$$

Transformada de L de Funciones Partidas

Comprobación: hagamos el cambio de variable $x = t - c$ al calcular $L[H_c(t)\, f(t)](s)$

$$= \int_0^\infty e^{-st} H_c(t) f(t) dt = \int_c^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-s(x+c)} f(x+c) dx$$

$$= e^{-sc} \int_0^\infty e^{-sx} f(x+c) dx$$

$= e^{-cs} L[f(t+c)](s)\ \forall s > 0$

ECUACIONES DIFERENCIALES CON LA FUNCIÓN DE HEAVISIDE Y OTRAS FUNCIONES PARTIDAS

Ejemplo 4: Resolver la ecuación diferencial, sujeta a las condiciones dadas:

$$y'' - 2y' + 2y = H_\pi(t); \quad y(0) = y'(0) = 1$$

Solución: Apliquemos T de Laplace, sabiendo

$$\boxed{L[H_c(t)] = \frac{e^{-cs}}{s} \ \forall s > 0, \ c > 0}$$

$$\Longrightarrow L[y'' - 2y' + 2y] = L[H_\pi(t)] = \frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$\Longrightarrow (s^2 - 2s + 2)L[y] - s + 1 = \frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$\Longrightarrow (s^2 - 2s + 2)L[y] - s + 1 = \frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow L[y] &= \frac{1}{(s^2 - 2s + 2)} \frac{1}{s} \cdot e^{-\pi s} + \frac{s - 1}{(s^2 - 2s + 2)} \\ &= A \cdot e^{-\pi s} + B \end{aligned}$$

A continuación hay que encontrar las fracciones simples de la función racional y las anti - transformadas de cada término:

$$A = \frac{1}{(s^2-2s+2)s} = \frac{as+b}{(s^2-2s+2)} + \frac{c}{s}$$

$$= \frac{-1}{2}\frac{(s-2)}{(s^2-2s+2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{s}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(s-1)}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s}$$

$$= -\frac{1}{2}L[e^t \cos t] + \frac{1}{2}L[e^t \operatorname{sen} t] + \frac{1}{2}L[1]$$

$$= L\Big[-\frac{1}{2}e^t \cos t + \frac{1}{2}e^t \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\Big]$$

Entonces

$$\Longrightarrow L[y] = A \cdot e^{-\pi s} + B$$

$$= \frac{1}{(s^2-2s+2)}\frac{1}{s} \cdot e^{-\pi s} + \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

$$\Longrightarrow L[y] = A \cdot e^{-\pi s} + B$$

$$= \frac{1}{(s^2 - 2s + 2)} \frac{1}{s} \cdot e^{-\pi s} + \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}$$

$$= L\Big[-\frac{1}{2} e^t \cos t + \frac{1}{2} e^t \operatorname{sen} t + \frac{1}{2} \Big] \cdot e^{-\pi s} + L[e^t \cos t]$$

Ahora, sabiendo que

$$\boxed{L[f(t)]e^{-cs} = L[f(t-c)H_c(t)] \quad \textit{cualquiera sea } c > 0}$$

obtenemos

$$\Longrightarrow y(t) = \left(-\frac{1}{2} e^{t-\pi} \cos(t-\pi) + \frac{1}{2} e^{t-\pi} \operatorname{sen}(t-\pi) + \frac{1}{2} \right) \cdot H_\pi(t) + e^t \cos t$$

Por lo tanto, la solución es la función partida, que resulta continua (y en este caso también derivable) en $t = \pi$. Notar que las condiciones iniciales se evalúan con la primera fórmula, ya que $t_0 = 0 < \pi$:

$$y(t) = \begin{cases} e^t \cos t & \text{si} \quad 0 \leqslant t < \pi \\ \\ e^t \cos t - \dfrac{1}{2} e^{t-\pi} \cos(t-\pi) + \dfrac{1}{2} e^{t-\pi} \operatorname{sen}(t-\pi) + \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad \pi \leqslant t \ \checkmark \end{cases}$$

Lema 1: Toda función partida

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & si \quad 0 \leqslant t < c \\ g(t) & si \quad c \leqslant t \end{cases}$$

se puede escribir usando la función de Heaviside $H_c(t)$ en la forma

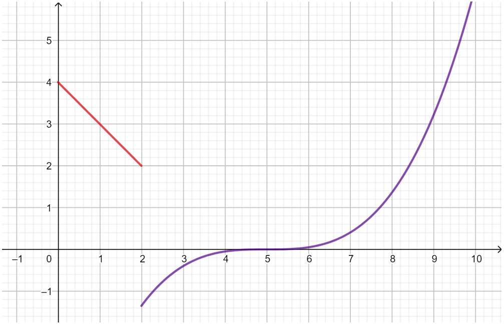
$$h(t) = f(t) + H_c(t)[g(t) - f(t)]$$

Por esto, su Transformada de Laplace se obtiene como

$$L[h] = L[f] + L[H_c(t)(g(t) - f(t))]$$

$$= L[f] + e^{-cs}L[g(t+c) - f(t+c)]$$

$h(t)$ es una función partida cualquiera



$$f(t) + H_c(t)[g(t) - f(t)] = \left\{ \begin{array}{lll} f(t) & si & 0 \leqslant t < c \\ g(t) & si & c \leqslant t \end{array} \right\} = h(t)$$

Atención Notación:

- $H_c(t)$ denota la función de Heaviside

- $h(t)$ denota una función cualquiera

En efecto, la función $f(t)+H_c(t)(g(t)-f(t))$ vale:

- $f(t)+\underbrace{H_c(t)}_{=0}(g(t)-f(t)) = f(t)$ para $t<c$ donde el 2do término se anula, y
- $f(t)+\underbrace{H_c(t)}_{=1}(g(t)-f(t)) = f(t)+g(t)-f(t) = g(t) \quad \forall c \leqslant t$

$$\Longrightarrow \; f(t)+H_c(t)[g(t)-f(t)] = \left\{ \begin{array}{lll} f(t) & si & 0 \leqslant t < c \\ g(t) & si & c \leqslant t \end{array} \right\} = h(t) \checkmark$$

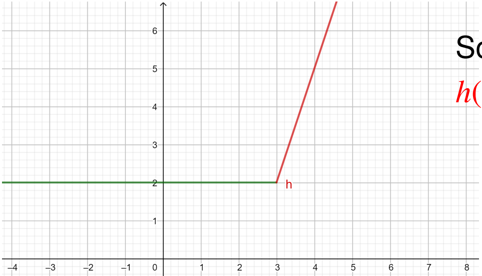
Por lo tanto, su transformada es

$$L[h](s) = L[f](s) + L[H_c(t)(g(t)-f(t))]$$

$$= L[f](s) + e^{-cs} L[g(t+c) - f(t+c)] \checkmark$$

Ejercicio 5. Resolver $y' + y = h(t)$; $\quad y(0) = 1$; si h:

$$h(t) = \begin{cases} 2 & si \quad 0 \leqslant t < 3 \\ 3t - 7 & si \quad 3 \leqslant t \end{cases}$$



Solución: Reescribamos h

$$h(t) = 2 + (3t - 7 - 2) \cdot H_3(t)$$

$$= 2 + (3t - 9) \cdot H_3(t)$$

entonces

$$\begin{aligned} L[h] &= 2 \cdot L[1] + L[(3t-9) \cdot H_3(t)] \\ \Longrightarrow \quad &= 2 \cdot \frac{1}{s} + e^{-3s} L[3(t+3)-9] = 2 \cdot \frac{1}{s} + e^{-3s} L[3t] \\ &= \frac{2}{s} + e^{-3s} \frac{3}{s^2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Resolvamos la ecuación aplicando Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} L[y' + y] &= L[h(t)] = \frac{2}{s} + e^{-3s}\frac{3}{s^2} \\ L[y'] + L[y] &= \\ (s+1)L[y] - y(0) &= \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow L[y] = \frac{1}{(s+1)} \cdot \left(\frac{2}{s} + \frac{3e^{-3s}}{s^2}\right) + \frac{1}{(s+1)}$$

Fracciones simples

$$= \frac{2}{s} - \frac{2}{(s+1)} + e^{-3s} \cdot \left(-\frac{3}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{3}{(s+1)} \right) + \frac{1}{(s+1)}$$

$$= L\left[2 - 2e^{-t}\right] + e^{-3s} \cdot \left(L\left[-3 + 3t + 3e^{-t}\right]\right) + L\left[e^{-t}\right]$$

$$= L\left[2 - e^{-t}\right] + L\left[H_3(t) \cdot \left(-3 + 3(t-3) + 3e^{-(t-3)}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow y(t) = 2 - e^{-t} + H_3(t) \cdot \left(-3 + 3(t-3) + 3e^{-(t-3)}\right)$$

$$\boxed{y(t) = 2 - e^{-t} + 3H_3(t) \cdot \left(t - 4 + e^{-(t-3)}\right) \quad \checkmark}$$

Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

6) Resolver $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2u = x^2 : x > 0, t > 0$
$u(0,t) = 0 \ \forall t > 0,\ u(x,0^+) = 0 \ \forall x > 0$

Idea de la solución: Aplicar Transformada de Laplace en la variable t para convertir la ecuación en derivadas parciales (EDP) en una que dependa de una sola variable (EDO), con coeficientes variables.

Supongamos que una única solución y que esta solución tiene las buenas propiedades que hacen falta en todo el procedimiento: que exista su T de L. Denotemos a la T de L de u respecto de la variable t:

$$L[u] = L[u(x,t)](x,s)$$

- Propiedad similar a la de T de Fourier:

$$L\left[x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right](x,s) = \int_0^\infty x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}e^{-ts}dt$$

$$= x\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty u(x,t)e^{-ts}dt = x\frac{\partial}{\partial x}L[u](x,s)$$

- Apliquemos T de Laplace a la ecuación original:

$L\left[x\frac{\partial u}{\partial x}\right]+L\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]+2L\left[u\right] = L\left[x^2\right] = x^2\frac{1}{s}$ pues x^2 es constante para t

- Apliquemos T de Laplace a la ecuación original:

$$L\left[x\frac{\partial u}{\partial x}\right]+L\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]+2L\left[u\right]=L\left[x^2\right]=x^2\frac{1}{s} \text{ pues } x^2 \text{ es constante para } t$$

$$= x\frac{\partial}{\partial x}L[u] + sL[u] - \underbrace{u(x,0^+)}_{=0} + 2L[u]$$

$$= x\frac{\partial}{\partial x}L[u] + (s+2)L[u]$$

Dividiendo a todo por x obtenemos entonces una ec diferencial ordinaria de orden 1 en la variable x:

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}L[u] + \frac{(s+2)}{x}L[u] = x\frac{1}{s}}$$

Recordemos de Mate 3

Teorema 2: Todas las soluciones de la ecuación de orden 1 no homogénea

$$\boxed{y' + a(x)\, y = b(x) : \;\; a \; continua}$$

son las funciones $y = y_h + y_p$

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} \cdot b(x) \, \mathrm{dx} + C \right)}$$

donde $A(x) = \int a(x) \, \mathrm{dx}$.

Solución de la ec diferencial ordinaria de orden 1 en la variable x:

$$\boxed{= \frac{\partial}{\partial x} L[u] + \frac{(s+2)}{x} L[u] = x\frac{1}{s}}$$

- $-A(x) = -\int \frac{(s+2)}{x} dx = -(s+2)\ln(x)$, por lo tanto

$$y_h(x) = Ce^{-\int \frac{(s+2)}{x} dx} = Ce^{-(s+2)\ln(x)} = Cx^{-(s+2)}$$

$y = y_h + y_p$ con y(x)=L[u](x,s)

Para la solución particular $y_p(x) = e^{-A(x)}\left[\int e^{A(x)} \cdot b(x)\, \mathrm{dx}\right]$

$$= x^{-(s+2)}\left[\int x^{(s+2)} \cdot \frac{x}{s}\, \mathrm{dx}\right] = x^{-(s+2)}\frac{1}{s}\left[\int x^{s+3} \cdot\ \mathrm{dx}\right]$$

$$= x^{-(s+2)}\frac{1}{s}\,\frac{x^{s+4}}{(s+4)} = \frac{1}{(s+4)s}x^2$$

Por lo tanto, $\boxed{L[u](x,s)}$

$$\boxed{= y = y_h + y_p = Cx^{-(s+2)} + \frac{1}{(s+4)s}x^2}$$

Usemos la 2da condición inicial para despejar C

Reemplacemos $u(0,t) = 0 \ \forall t > 0$ en la T de Laplace, entonces

$$0 = L[u(0,t)](s) = 0 + \lim_{x \to 0^+} Ce^{-(s+2)ln(x)} = +\infty \text{ salvo que sea } C = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{L[u](x,s) = \frac{x^2}{s(s+4)} : x > 0, \ \ s > -2}$$

Reescribamos en fracciones simples y anti-transformemos:

$$= x^2 \frac{1}{s(s+4)} = x^2 \left[\frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+4} \right] = \frac{x^2}{4}\left(L[1] - L[e^{-4t}] \right)$$

Por lo tanto, la solución es

$$\boxed{u(x,t) = \frac{x^2}{4}\left(1 - e^{-4t}\right) : x, t > 0} \checkmark$$

Práctica 9, ejercicio 16. c)

Calcular $L[u]$ sabiendo que u satisface la ecuación de Bessel

$$tu'' + u' + tu = 0, \;\; u(0) = 1, \;\; u'(0) = 0$$

Solución: sea $\varphi(s) = L[u](s)$ y apliquemos T de Laplace:

$$0 = L[tu'' + u' + tu] = -\frac{d}{ds}\left(s^2\, L[u] - s\right) + sL[u] - 1 - \frac{d}{ds}L[u]$$

$$= -\left[2s\varphi(s) + s^2\, \varphi'(s) - 1\right] + s\,\varphi(s) - 1 - \varphi'(s)$$

$$= -s\,\varphi(s) - \left[s^2 + 1\right]\, \varphi'(s) + 1 - 1$$

$$\Longleftrightarrow \varphi'(s) = -\frac{s}{(s^2+1)}\varphi(s)$$

Por lo tanto, sólo resta resolver la ecuación de orden uno:

$$\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = -\frac{s}{(s^2+1)} \Rightarrow \ln \varphi(s) = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{(s^2+1)} + C$$

$$\varphi(s) = K \left(s^2+1\right)^{-1/2} \checkmark$$

Fin del Ejercicio.

Se obtiene (con más matemática) que la solución es un múltiplo de la primera función de Bessel del primer tipo

$$u(t) = J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^n} t^{2n} \checkmark$$

Más Ejemplos Similares

Ecuaciones Diferenciales con Convolución

7) Determinar la función $y(t)$ solución de la ecuación

$$y(t) = \operatorname{sen}(t) + \int_0^t e^{t-x} y(x)\, dx$$

Solución: Apliquemos Transformadas

$$L[y] = L[\operatorname{sen}(t)] + L[e^t \star y(t)]$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + L[e^t] \cdot L[y] = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s-1} \cdot L[y]$$

entonces

$$L[y]\left(1-\frac{1}{s-1}\right)=L[y]\left(\frac{s-2}{s-1}\right)=\frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow L[y]=\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{(s-1)}{(s-2)}$$

$$=\frac{3-s}{5(s^2+1)}+\frac{1}{5(s-2)}$$

$$=\frac{1}{5}\left[3\,\mathrm{sen}(t)-\cos(t)+e^{2t}\right]\checkmark$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

8) Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 2y' + 5y = 5t,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Solución: apliquemos las propiedades

$$L[y'] = sL[y] - y(0),\ L[y''] = s^2L[y] - sy(0) - y'(0)$$

Entonces la ecuación dada es equivalente a:

$$s^2L[y] - 1 - 2sL[y] + 5L[y] = L[5t] = \frac{5}{s^2}$$

$$\Longleftrightarrow (s^2 - 2s + 5)L[y] = 1 + \frac{5}{s^2}$$

Se despeja $L[y]$ y se resuelve por fracciones simples:

$$\Longleftrightarrow L[y] = \frac{1}{(s^2 - 2s + 5)} + \frac{5}{s^2}\frac{1}{(s^2 - 2s + 5)}$$

$$= -\frac{2}{5}\frac{s-2}{(s-1)^2 + 4} + \frac{2}{5s} + \frac{1}{s^2}$$

El primer término se descompone a su vez en dos, para obtener las transformadas del seno y el coseno de $2t$ por e^t:

$$= -\frac{2}{5}\frac{s-1}{(s-1)^2 + 4} + \frac{2}{5}\frac{1}{(s-1)^2 + 4} + \frac{2}{5s} + \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{5}\left[-2e^t\cos(2t) + e^t\,\mathrm{sen}(2t) + 2 + 5t\right] \checkmark$$

Ej. 9) Resolver la ecuación diferencial - integral:

$$y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(x)dx = \frac{27}{2}t^2,\ y(0) = -1$$

Apliquemos la propiedad: $L\left[\int_0^t y(x)dx\right] = \frac{1}{s}L[y]$

$$\Longrightarrow sL[y] - y(0) + 6L[y] + \frac{9}{s}L[y] = \frac{27}{2}\frac{2}{s^3}$$

$$= \left(s + 6 + \frac{9}{s}\right)L[y] + 1 = \frac{s^2 + 6s + 9}{s}L[y] + 1$$

$$\Longrightarrow L[y] = -\frac{s}{s^2 + 6s + 9} + \frac{27}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2 + 6s + 9}$$

Cálculo auxiliar de la pág anterior: Fracciones Simples

$$(*) L[y] = \frac{27}{s^2(s^2+6s+9)} - \frac{s}{(s^2+6s+9)}$$

$$= \frac{27 - s^3}{s^2(s^2+6s+9)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{(s+3)^2}$$

$$= \frac{As(s+3)^2 + B(s+3)^2 + Cs^2(s+3) + Ds^2}{s^2(s+3)^2}$$

- $s = 0 \Longrightarrow 27 = 9B \qquad \Longrightarrow B = 3$
- $s = -3 \Longrightarrow 54 = 9D \qquad \Longrightarrow D = 6$
- coeficiente de $s^3 \qquad \Longrightarrow -1 = A + C$
- $s = 1 \Longrightarrow 26 = 16A + 16B + 4C + D \qquad \Longrightarrow A = -2, C = 1$

$$\Longrightarrow L[y] = -\frac{s}{s^2+6s+9} + \frac{27}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+6s+9}$$

$$(*) = -\frac{2}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s+3} + \frac{6}{(s+3)^2}$$

$$\boxed{\Longrightarrow y(t) = -2 + 3t + e^{-3t} + 6t \cdot e^{-3t} \checkmark}$$

Atención: en el problema anterior, se pide encontrar la solución de la ecuación que verifica $y(0) = -1$.

Una 2da condición inicial está dada evaluando ambos miembros en $t = 0$:

$$y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(x)dx = \frac{27}{2}t^2$$

$$\Longrightarrow y'(0) + 6y(0) = \left.\frac{27}{2}t^2\right|_{t=0} = 0 \Longrightarrow y'(0) = 6$$

por lo cual, la solución hallada es única y verifica $y(0) = -1$ y también $y'(0) = 6$:

$$y(t) = -2 + 3t + e^{-3t} + 6t \cdot e^{-3t} \Longrightarrow y(0) = -1$$

$$y'(t) = 3 - 3e^{-3t} + 6 \cdot e^{-3t} - 18t \cdot e^{-3t} \Longrightarrow y'(0) = 6$$

Otro camino para resolver

$$y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(x)dx = \frac{27}{2}t^2, \; y(0) = -1$$

Teorema Fundamental del Cálculo:

$$Si\ F(t) = \int_c^t f(x)dx \Longrightarrow F'(t) = f(t)\ \forall c < t$$

Derivemos y evaluemos en la ecuación dada $\Longrightarrow y'(0) = 6$

$$\Longrightarrow \boxed{y''(t) + 6y'(t) + 9 \cdot y(t) = 27t, \; y(0) = -1, \; y'(0) = 6}$$

Es decir, la original es equivalente a la nueva de orden 2, con dos condiciones iniciales

Resolvamos por T de Laplace:

$$\Longrightarrow y''(t) + 6y'(t) + 9 \cdot y(t) = 27t,\; y(0) = -1,\; y'(0) = 6$$

$$\Longrightarrow s^2L[y] - sy(0) - y'(0) + 6\,(sL[y] - y(0)) + 9L[y] = \frac{27}{s^2}$$

$$\Longrightarrow (s^2 + 6s + 9)L[y] + s - 6 + 6 = \frac{27}{s^2}$$

$$\Longrightarrow L[y] = \frac{27}{s^2(s^2 + 6s + 9)} - \frac{s}{(s^2 + 6s + 9)}$$ $\Longrightarrow$ sigue igual que antes

$$(*) = -\frac{2}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s+3} + \frac{6}{(s+3)^2}$$

$$\boxed{\Longrightarrow y(t) = -2 + 3t + e^{-3t} + 6t \cdot e^{-3t}}$$ ✓