Clase 2: $\mathbb{C}$-derivabilidad

1. Definición de la $\mathbb{C}$-derivabilidad

1.1. Repaso sobre la noción de derivada de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Para estudiar el comportamiento de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cerca de un punto x_0, lo primero que podemos hacer es ver si $\lim_{x\to x_0} f(x) \to f(x_0)$ o sea ver si f es continua en x_0. En este caso estamos diciendo que f se parece mucho a la función constante $f(x_0)$ cerca de x_0.

Si ahora queremos una descripción más fina del comportamiento de f cerca de x_0, podemos intentar aproximar f cerca de x_0 no por una función constante sino por una función lineal

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0), \tag{1}$$

donde α es algun número real y ε es alguna función tal que $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Geométricamente, estamos diciendo que el gráfico de f cerca de $(x_0, f(x_0))$ es muy parecido a la recta de ecuación $y = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$. Note también que introduciendo $h = x - x_0$, podemos reescribir (1) como

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + h\varepsilon(h). \tag{2}$$

La escritura (1) implica que f es derivable en x_0 con derivada $f'(x_0) = \alpha$. Recuerde que f es derivable en x_0 si, por definición, el cociente incremental $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tiene un límite cuando $x \to x_0$. En este caso este límite se llama derivada de f en x_0 y se nota $f'(x_0)$. Dicho esto, despejemos ε en (1). Obtenemos

$$\varepsilon(x - x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \alpha.$$

Como $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, deducimos pasando al límite $x \to x_0$ que el cociente incremental $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tiende a α cuando $x \to x_0$, lo que prueba que $f'(x_0) = \alpha$.

Reciprocamente, si suponemos que f es derivable en x_0, o sea que

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

entonces, tenemos la escritura (2) con $f'(x_0)$ al lugar de α y con $\varepsilon(h) := f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Para ver esto basta despejar $f(x_0+h)$ de la definición de ε. En conclusión:

Proposición 1.1. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto x_0 si y sólo si se puede escribirla cerca de x_0 como en* (1). *En este caso $\alpha = f'(x_0)$.*

Note que para definir la derivada de f en x_0, necesitamos conocer f en todo un entorno de x_0 porque necesitamos conocer $f(x_0+h)$ con h chico (positivo y negativo). Luego si f no esta definida en todo $\mathbb{R}$ sino únicamente en algún subconjunto U de $\mathbb{R}$, pediremos que U sea abierto para estar seguro de que cualquiera sea el punto $x_0 \in U$ que consideremos, siempre f quedará bien definida en todo un entorno de x_0.

1.2. Definición de la $\mathbb{C}$-derivada

De manera análoga a lo que recordamos en la sección anterior sobre la derivada de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, para estudiar el comportamiento de una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cerca de un punto z_0, podemos primero ver si f es continua en z_0. Si es el caso, para obtener una descripcion más fina del comportamiento de f cerca de z_0, podemos ver si el cociente incremental $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ tiene un límite cuando z_0. Obtenemos entonces la siguiente definición:

Definición 1.1. *Una función $f : U \to \mathbb{C}$ (donde U es un abierto de $\mathbb{C}$) es $\mathbb{C}$-derivable en el punto $z_0 \in U$ si el límite siguiente existe*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{3}$$

Note que introduciendo $h := z - z_0$ en el cociente incremental, podemos reescribir (3) *como*

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \tag{4}$$

Note que, si existe, $f'(z_0)$ es un número complejo (no necesariamente un número real) ya que f es a valores complejos.

De la misma manera en que probamos la proposición 1.1, se puede ver fácilmente que esta definición es equivalente a la siguiente:

Definición 1.2. *Una función $f : U \to \mathbb{C}$ (donde U es un abierto de $\mathbb{C}$) es $\mathbb{C}$-derivable en el punto $z_0 \in U$ si existen $\alpha \in \mathbb{C}$ y una función $\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ tales que*

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + \varepsilon(z - z_0)(z - z_0) \tag{5}$$

para todo z en un entorno de z_0. En este caso decimos que α es la derivada de f en z_0 y notamos $f'(z_0) := \alpha$.

Note que, haciendo $h := z - z_0$, podemos reescribir (5) como

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + \varepsilon(h)h. \tag{6}$$

1.3. Algo de vocabulario

Definición 1.3. *Decimos que una función* $f : U \to \mathbb{C}$ *(*U *es un abierto de* $\mathbb{C}$*) es holomorfa (o analítica) en* U *si* f *es* $\mathbb{C}$*-derivable en cada punto de* U*.*

Rigurosamente, el concepto de función analítica se refiere a otra noción que la de $\mathbb{C}$-derivabilidad. Pero ocurre que una función holomorfa (en el sentido de la definición anterior) es analítica por lo que podemos tomar "holomorfaz .ªnalíticaçomo sinónimos.

Definición 1.4. *Una función holomorfa en todo* $\mathbb{C}$ *(es decir definida y* $\mathbb{C}$*-derivable en cualquier punto de* $\mathbb{C}$*) se dice entera.*

1.4. Ejemplos

Veamos ahora unos ejemplos. Empecemos por las funciónes más simples posibles: las funciónes constantes:

Ejemplo 1.1. *Sea* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función constante es decir existe un* $\xi \in \mathbb{C}$ *tal que* $f(z) = \xi$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$*. Veamos si* f *es* C*-derivable en un punto* $z_0 \in C$ *o sea veamos si existe el límite del cociente incremental* (3)*: para todo* $z \neq z_0$ *tenemos*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\xi - \xi}{z - z_0} = \frac{0}{z - z_0} = 0.$$

El cociente incremental es entonces siempre 0*. Luego una función constante es* $\mathbb{C}$*-derivable en cualquier punto con derivada* 0*.*

Veamos ahora si las funciónes $z, z^2, z^3, ...$ son $\mathbb{C}$-derivables:

Ejemplo 1.2. *Tratemos el caso general* $f(z) = z^n$ *donde* $n = 1, 2, ...$ *Fijamos un punto cualquiera* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y veamos si existe el límite* (4)*. Usando la fórmula del binomio de Newton, tenemos*

$$(z_0 + h)^n = z_0^n + n z_0^{n-1} h + \binom{n}{2} z_0^{n-2} h^2 + \binom{n}{3} z_0^{n-3} h^3 + ... + h^n$$

o sea

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = n z_0^{n-1} h + h^2 \Big(\binom{n}{2} z_0^{n-2} + \binom{n}{3} z_0^{n-3} h + ... + h^{n-2} \Big).$$

Dividiendo por h *en ambos lados,*

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = n z_0^{n-1} + h \Big(\binom{n}{2} z_0^{n-2} + ... + h^{n-2} \Big).$$

Haciendo $h \to 0$ *obtenemos entonces que el límite del cociente incremental existe y vale* $n z_0^{n-1}$ *cualquier sea el número entero* $n \in \mathbb{N}$ *y el punto* $z_0 \in \mathbb{C}$*. Luego, cualquier sea* $n \in \mathbb{N}$*, la función* z^n *es* $\mathbb{C}$*-derivable en cualquier punto de* $\mathbb{C}$ *(o sea es entera) con derivada* $n z^{n-1}$*.*

Veamos ahora un ejemplo de una función simple que no es $\mathbb{C}$-derivable en ningún punto:

Ejemplo 1.3. *Consideramos la función $f(z) = \bar{z}$. Recuerde que $\bar{z}$ es el conjungado de z: si $z = x + iy$ entonces $\bar{z} = x - iy$. Fijamos un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ y veamos si f es $\mathbb{C}$-derivable en z_0. Tenemos*

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = \overline{z_0 + h} - \overline{z_0} = \overline{z_0} + \overline{h} - \overline{z_0} = \overline{h}.$$

Luego el cociente incremental es

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

y debemos ver si este cociente tiene un límite cuando $h \to 0$. Recuerde que h es un número complejo (no necesariamente un número real). Vemos facilmente que

$$\frac{\bar{h}}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1 & \text{si } h \in \mathbb{R}, \\ \frac{-h}{h} = -1 & \text{si } h \text{ es imaginario puro es decir } h \in i\mathbb{R}. \end{cases}$$

Luego, cualquier sea el punto z_0, el límite del cociente incremental no existe cuando $h \to 0$. Por lo tanto la función $\bar{z}$ no es $\mathbb{C}$-derivable en ningún punto de $\mathbb{C}$.

Veamos otro ejemplo clásico de función no $\mathbb{C}$-derivable en cualquier punto:

Ejemplo 1.4. *Consideramos la función $f(z) = |z|^2$. Si escribimos f como $f(z) = z\bar{z}$ y recordamos el ejemplo anterior, podemos tener ya fuertes dudas sobre la existencia de la $\mathbb{C}$-derivada de f. Fijemos un punto z_0 y examinemos el cociente incremental:*

$$f(z_0 + h) = (z_0 + h)(\bar{z}_0 + \bar{h}) = z_0\bar{z}_0 + z_0\bar{h} + h\bar{z}_0 + h\bar{h} = f(z_0) + z_0\bar{h} + h(\bar{z}_0 + \bar{h}).$$

Luego

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = z_0\frac{\bar{h}}{h} + \bar{z}_0 + \bar{h}.$$

Ya vimos en el ejemplo anterior que $\frac{\bar{h}}{h}$ no tiene límite cuando $h \to 0$ por lo que podemos ya concluir que f no es derivable en ningún punto $z_0 \neq 0$. Si $z_0 = 0$, este término desaparece y obtenemos

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \bar{h}$$

que tiende a 0 cuando $h \to 0$. Luego f es $\mathbb{C}$-derivable en 0 con $f'(0) = 0$. En conclusion la función $|z|^2$ es $\mathbb{C}$-derivable únicamente en 0. Note que f no es $\mathbb{C}$-derivable en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ por culpa del $\bar{z}$ “escondido” en $|z|^2$.

Estos últimos dos ejemplos son muy importantes porque muestran que no cualquier función de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-derivable en todo punto. De hecho, la regla intuitiva general es que si en la definición de la función que estamos estudiando aparece un $\bar{z}$, aunque escondido como en el caso de $|z|^2$, hay que tener mucho cuidado ya que es probable que dicha función no sea $\mathbb{C}$-derivable.

2. Propiedades

Las propiedades esenciales asociadas a la noción de $\mathbb{C}$-derivabilidad son las mismas que las asociadas a la noción de derivabilidad para funciónes de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Informalmente:

- una función $\mathbb{C}$-derivable en un punto es continua en este punto,
- las regas para derivar sumas, productos y composiciones son exactamente las mismas que para funciónes de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Veamos la primera propiedad:

Proposición 2.1. *Si $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-derivable en un punto $z_0 \in U$ entonces es continua en este punto.*

Demostración. La prueba es imediata a partir de (5) ya que pasando al límite $z \to z_0$ en esta expresión obtenemos que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z - z_0) = f(z_0).$$

Reconocemos la definición de ser continua en z_0. □

Las demás propiedades tienen que ver con el manejo algebraico de la derivada, es decir: cómo derivar una suma, un producto, un cociente y una composicion de funciones. Vamos a ver que para calcular derivadas usamos las mismas tecnicas que para derivar funciónes de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Proposición 2.2. *Supongamos que las funciónes $f, g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son $\mathbb{C}$-derivables en el punto $z_0 \in U$. Entonces las funciones $f + g$, fg y f/g (si $g(z_0) \neq 0$) son $\mathbb{C}$-derivables en z_0 con*

$$\begin{aligned}
&(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0),\\
&(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0),\\
&\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{g(z_0)f'(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Note que las fórmulas para derivar sumas, productos y cocientes son exactamente las mismas que para funciónes de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Eso se debe simplemente a que la definición (3) de la $\mathbb{C}$-derivada como límite del cociente incremental es formalmente la misma que la definición de la derivadad de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Veamos por ejemplo la prueba de la fórmula para el producto:

Demostración. Escribimos el cociente incremental para fg intentando hacer aparecer los cocientes incrementales para f y g. Primero

$$\begin{aligned}
(fg)(z_0+h) - (fg)(z_0) &= f(z_0+h)g(z_0+h) - f(z_0+h)g(z_0) + f(z_0+h)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)\\
&= f(z_0+h)\Big(g(z_0+h) - g(z_0)\Big) + g(z_0)\Big(f(z_0+h) - f(z_0)\Big)
\end{aligned}$$

Dividiendo por $z - z_0$, obtenemos

$$\frac{(fg)(z_0+h) - (fg)(z_0)}{z - z_0} = f(z_0+h)\frac{g(z_0+h) - g(z_0)}{z - z_0} + g(z_0)\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Como f y g son $\mathbb{C}$-derivables en z_0 por hipótesis, sabemos que los cocientes incrementales en el miembro derecho convergen cuando $h \to 0$ a $g'(z_0)$ y $f'(z_0)$. Luego el límite cuando $h \to 0$ del cociente incremental para fg (el miembro izquierdo) existe y tenemos la fórmula para $(fg)'(z_0)$.

Tambien podriamos haber usado la defiinicion (5) para probar este resultado: sabemos que

$$f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0)h + h\varepsilon_1(h)$$
$$gf(z_0+h) = g(z_0) + g'(z_0)h + h\varepsilon_2(h)$$

donde las funciónes $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ verifican $\lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = \lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h) = 0$. Multiplicando estas dos expresiones, obtenemos

$$f(z_0+h)g(z_0+h) = f(z_0)g(z_0) + h\alpha + h\varepsilon(h)$$

con

$$\alpha = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0) \qquad \text{y} \qquad \varepsilon(h) = \varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h).$$

Como la función ε cumple que $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$, concluimos en vista de la definición 1.2 que fg es $\mathbb{C}$-derivable en z_0 con derivada $(fg)'(z_0) = \alpha$. □

Ejemplo 2.1. *Combinando lo que vimos en los ejemplos* (1.1) *y* (1.2)*, sabemos que las funciónes* z^n*,* $n = 0, 1, 2, ...,$ *son* $\mathbb{C}$*-derivables en todo* $\mathbb{C}$ *con derivada* $(z^n)' = nz^{n-1}$*. Aplicando la propiedad sobre la derivada del producto obtenemos por ejemplo que* $(3z^5)' = 3 \times 5z^4 = 15z^4$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$*. En general una función de la forma* az^n *con* $a \in \mathbb{C}$*,* $n = 0, 1, 2, ...,$ *es* $\mathbb{C}$*-derivable con derivada* $(az^n)' = naz^{n-1}$*.*

Aplicando la propiedad sobre la derivada de una suma, obtenemos que cualquier polinomio $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$ *con* $a_0, a_1, .., a_n \in \mathbb{C}$ *es* $\mathbb{C}$*-derivable en todo* $\mathbb{C}$ *con derivada*

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + ... + na_n z^{n-1}. \tag{8}$$

OJO! Para aplicar las fórmulas (7), hay que saber de antemano que f y g son $\mathbb{C}$-derivables en z_0. Sabemos por ejemplo que las funciónes z^n, $n = 0, 1, 2, ...,$ son $\mathbb{C}$-derivables en todo $\mathbb{C}$ pero que hay funciones que no son $\mathbb{C}$-derivables en cualquier punto (como $\bar{z}$ y $|z|^2$). En caso de tener una duda sobre la $\mathbb{C}$-derivablidad, la única solución consiste en volver a la definición examinando el cociente incremental (3) o el desarollo tipo Taylor (5).

Proposición 2.3. *Supongamos que* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *es* $\mathbb{C}$*-derivable en* z_0 *y que* g *es* $\mathbb{C}$*-derivable en el punto* $f(z_0)$*. Entonces la función compuesta* $g \circ f$ *es* $\mathbb{C}$*-derivable en* z_0 *con*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0). \tag{9}$$

Por ejempo si tenemos una función $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera entonces la función compuesta $g(z) := h(z^2)$ es entera con $g'(z) = 2zh'(z^2)$.

La fórmula (9) es formalmente la misma que la fórmula para derivar una compuesta de funciónes de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que conocemos del CBC con la diferencia que $g'(f(z_0))$ y $f'(z_0)$ son numeros complejos.

3. Lo que hay que recordar

Definimos la noción de $\mathbb{C}$-derivada de una función $f : U \to \mathbb{C}$ de forma análoga a la definición de la derivada de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$$f'(z_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

o de forma equivalente via un desarrollo tipo Taylor:

$$f(z_0+h) = f(z_0) + \alpha h + \varepsilon(h)h$$

(con $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$) y en este caso $\alpha = f'(z_0)$.

Vimos que concretamente esta noción de $\mathbb{C}$-derivada verifica las mismas propiedades que la derivada común de funciónes de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (la derivadad de la suma es la suma de las derivadas ...) y que cualquier polinomio es $\mathbb{C}$-derivable en todo $\mathbb{C}$ con derivada dada por (8). En cambio hay funciónes que no son $\mathbb{C}$-derivables en cualquier punto, por ejemplo $\bar{z}$. En general si en la definición de la función aparece $\bar{z}$, no se puede a priori afirmar nada sobre la $\mathbb{C}$-derivabilidad de dicha función y hay que volver a la definición de $\mathbb{C}$-derivabilidad.