Pautas para el trabajo práctico

1. Formar grupos de entre dos y cuatro personas.

2. Enviar un e-mail a la dirección `ecn.octave@gmail.com` antes del jueves 22 de Junio, con los datos de los integrantes del grupo (nombre y número de libreta) y con el número de enunciado elegido (que no podrá ser modificado).

3. La defensa del trabajo es presencial, en un laboratorio u otro lugar a determinar, y será entre los días 3 y 7 de Julio, inclusive, preferentemente en horario de la práctica de la materia. No hay que entregar código impreso. Se debe enviar por e-mail a la dirección `ecn.octave@gmail.com` el conjunto de archivos del programa que se pide en el enunciado, con al menos 24 horas de anticipación a la defensa. De ser necesario, se puede mostrar en papel todo aquello que complemente o explique la resolución. Haremos preguntas a cada integrante del grupo.

Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2017

Trabajo Práctico N° 1: El problema de tres cuerpos.

Se quiere resolver el problema de tres cuerpos, sujetos a atracción gravitatoria mutua. Para simplificar, supondremos que los cuerpos se mueven en un mismo plano. Si notamos $r_i = (x_i, y_i)$ la posición del cuerpo i-ésimo, y m_i su masa ($i = 1, 2, 3$), las ecuaciones (vectoriales) que rigen el movimiento de los cuerpos son:

$$\ddot{r_1} = -Gm_2 \frac{r_1 - r_2}{\|r_1 - r_2\|^3} - Gm_3 \frac{r_1 - r_3}{\|r_1 - r_3\|^3}, \tag{1}$$

para el primer cuerpo, y las anágolas para los otros dos. G es la constante de gravitación universal, $G = 0{,}4982 \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{dia}^2\mathrm{Kg}}$.

a) Formular el problema como un sistema de orden uno de la forma:

$$\dot{z} = f(z).$$

Observar que deben obtenerse doce ecuaciones ($z \in \mathbb{R}^{12}$): cada una de las tres ecuaciones vectoriales de la forma (1) debe escribirse como dos ecuaciones escalares (una por coordenada), y a su vez, estas ecuaciones de segundo orden se convierten en dos de orden uno.

b) Implementar una función `tres_cuerpos` que reciba como input un vector y y las masas m_1, m_2, m_3, y devuelva los valores de $\dot{z} = f(z)$.

c) Se desea resolver el problema para el sistema Sol (S) - Tierra (T)- Luna (L). Las masas de estos cuerpos (en Kg) son: $m_T = 5{,}97 \times 10^{24}$, $m_L = 7{,}3477 \times 10^{22}$ y $m_S = 1{,}9891 \times 10^{30}$. La distancia Tierra-Sol es $d_{TS} = 1{,}49597887 \times 10^{11}$m, y la distancia Tierra-Luna: $d_{TL} = 3{,}844 \times 10^8$m. Supondremos que inicialmente el Sol se encuentra en el origen de coordenadas, la Tierra en el punto $(0, d_{TS})$ y la Luna en el punto (d_{TL}, d_{TS}).

La velocidad tangencial de la Tierra en torno del Sol, en metros/día, está dada por $v_T = \frac{2\pi d_{TS}}{365}$. Análogamente, la velocidad de la Luna tiene dos componentes: una correspondiente a la rotación en torno al Sol, que se puede aproximar por $v_{LS} = v_T$, y otra correspondiente a su rotación entorno a la Tierra, dada por: $v_{LT} = \frac{2\pi d_{TL}}{28}$. Así, dadas las posiciones iniciales asumidas, las velocidades iniciales pueden tomarse: $v_S = (0, 0)$, $v_T = (v_T, 0)$ y $v_L = (v_{LS}, -v_{LT})$.

Definir la función `f = @(t,z) tres_cuerpos(y,m_S,m_T,m_L)` y utilizarla para correr alguno de los métodos implementados, con los valores iniciales apropiados, en un intervalo de tiempo que abarque 365 días.

Graficar simultáneamente, y_i en función de x_i para $i = 1, 2, 3$. Graficar aparte las posiciones de la Tierra y la Luna.

Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2017

Trabajo Práctico N° 2: Problema de Poisson en un cuadrado.

Consideramos el problema de Poisson en el cuadrado unitario, dado por la ecuación:

$$-\Delta u = f(x,y) \quad (x,y) \in \Omega = [0,1] \times [0,1], \tag{2}$$

con condiciones de contorno apropiadas. Podemos interpretar, por ejemplo, que u es el potencial electromagnético inducido por la distribución de cargas dada por f. De este modo, $E = -\nabla u$ es el campo eléctrico.

Considerando una malla equiespaciada de paso h en ambas coordenadas, el problema se puede discretizar como:

$$-\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = f(x,y) \tag{3}$$

donde $u_{i,j} \sim u(x_i, y_j)$.

Ejercicio 1 Escribir un programa que resuelva el problema con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas: $u|_{\partial\Omega} = 0$. Probarlo utilizando como fuentes:

- $f(x,y) = \operatorname{sen}(\pi x)\operatorname{sen}(\pi y)$,
- Una carga puntual dada por:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{h^2} & x = \frac{1}{2},\, y = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$
- Una carga distribuida a lo largo del segmento central:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{h} & x = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Graficar el potencial u y el campo generando E. Para ello, calcular E sobre todos los nodos interiores de la malla utilizando diferencias centradas en u. Estudiar el comando `quiver`.

Ejercicio 2 Para simular una pila consideramos el problema (2) con fuente nula y datos de contorno dados por condiciones de Newmann en dos caras opuestas:

$$u_x(0,y) = u_x(1,y) = 0 \quad \forall y,$$

y condiciones de Dirichlet que representen una diferencia de potencial en las otras dos caras:

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 1, \quad \forall x.$$

Implementar un programa que tenga en cuenta estas condiciones y grafique el campo resultante.

Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2017

Trabajo Práctico N° 3: Resonancia de la cuerda vibrante.

El problema de la oscilación de una cuerda fija en sus extremos, con un forzante f, puede ser descripto, al menos para pequeñas elongaciones, por la ecuación de ondas con condición de contorno:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = \alpha u_{xx}(x,t) + f(x,t) & x \in \Omega = [0,1], t > 0 \\ u(0) = u(1) & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Los datos iniciales adecuados son, por ejemplo, la posición inicial de la cuerda y su velocidad inicial. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\alpha = 1$.

Resolviendo el problema con $f = 0$, por el método de separación de variables, se buscan soluciones de la forma $U(t,x) = T(t)Z(x)$; de modo que

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{Z''(x)}{Z(x)} = \lambda,$$

para alguna constante λ. Usando las condiciones de contorno, tenemos que

$$Z(0) = Z(1) = 0$$

es decir que λ es un autovalor de la ecuación de Laplace con datos de contorno Dirichlet homogéneo

$$\begin{cases} Z'' - \lambda Z = 0 & x \in [0,1] \\ Z(0) = Z(1) & = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Se sabe que la ecuación (2) tiene una sucesión de autovalores negativos $\{\lambda_n\}_n$ con correspondientes autofunciones $Z_n(x)$ y que $\lambda_n \to -\infty$ cuando $n \to +\infty$. La correspondiente función T_n es una solución de la ecuación

$$T'' - \lambda_n T = 0$$

Si $\lambda_n = -\omega_n^2$ resulta que $T_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$, y de este modo, las soluciones de (1) son de la forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) Z_n(x) \tag{3}$$

donde los valores a_n y b_n se obtienen a partir de las condiciones iniciales. A los autovalores λ_n se los llama los modos *normales de oscilación*.

Ejercicio 1 Calcular los autovalores y las autofunciones del laplaciano. Para ello, considerar una discretización del dominio $\Omega = [0,1]$ con una malla $x_i = i/N$, $0 \leq i \leq N$.

Llamando $h = 1/N$ se obtiene el siguiente esquema, sobre la malla introducida, para aproximar la ecuación (2).

$$\frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2} = \lambda z_i \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

Reescribir esto como un problema lineal $Az = \lambda z$. Y resolver numéricamente. Graficar los 9 primeros autovectores (aproximaciones de las autofunciones). (Consultar la documentación de los comandos `eig`, `eigs` y `subplot`).

Finalmente, se desea resolver el problema (1), considerando datos iniciales:

$$\begin{array}{c} u(x,0) = g(x), \\ u_t(x,0) = 0. \end{array} ,$$

y forzante dado por una función periódica de la forma: $\cos(\omega t)v(x)$. Cuando la frecuencia de oscilación ω se corresponde con un autovalor del laplaciano se produce el fenómeno de resonancia: como la frecuencia del forzante coincide con una frecuencia propia de la cuerda, la oscilación se hace cada vez más grande.

Discretizando la ecuación en un esquema explícito se obtiene:

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{dt^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + f_j^n,$$

donde u_j^n es la aproximación de $u(x_j, t_n)$ y $f_j^n = f(x_j, t_n)$. La solución a tiempo cero se conoce por el dato inicial. La condición inicial en la derivada respecto del tiempo permite plantear una ecuación adicional

$$u_j^0 - u_j^{-1} = dt\, u_t(x_j, t_0)$$

de la cual despejar el valor de u_j^{-1}.

Ejercicio 2 Teniendo en cuenta las condiciones de contorno, escribir el sistema lineal que debe resolverse en cada iteración para calcular u^{n+1} en función de u^n, u^{n-1} y f^n. Implementar un programa que resuelva el problema y grafique la evolución de la solución en función del tiempo, aprovechando los comandos `pause` y `drawnow`.

Resolver considerando $f(x,t) = \cos(\sqrt{|\lambda|}t)v(x)$, donde λ y v son un autovalor del laplaciano y su correspondiente autovector, calculados con el programa del ejercicio anterior. En principio considerar $g = 0$. Observar qué sucede, por ejemplo, cuando se toma g igual al primer autovector del laplaciano (multiplicado por 0,1) y v el tercer autovector. Resolver también con dato inicial $g(x) = 0{,}1x(1-x)$.

Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2017

Trabajo Práctico N° 4: Ecuación del calor en un cuadrado.

Consideramos el problema del calor en el cuadrado unitario, dado por la ecuación:

$$u_t = \alpha \Delta u + f(x, y, t) \quad (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1], \tag{1}$$

con condiciones de contorno $u = 0$ en $\partial\Omega$, y dato inicial:

$$u(x, y, 0) = g(x, y)$$

Considerando una malla equiespaciada de paso h en ambas coordenadas, el problema se puede discretizar mediante el esquema implícito:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u^{n+1}_{i+1,j} - 2u^{n+1}_{i,j} + u^{n+1}_{i-1,j}}{h^2} + \alpha \frac{u^{n+1}_{i,j+1} - 2u^{n+1}_{i,j} + u^{n+1}_{i,j-1}}{h^2} + f(x, y, t) \tag{2}$$

donde $u^n_{i,j} \sim u(x_i, y_j, t_n)$.

Ejercicio 1 Escribir un programa que resuelva el problema con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas: $u|_{\partial\Omega} = 0$. Probarlo utilizando una fuente nula, y cambiando el parámetro α y el dato inicial g. ¿Qué se observa?

Fijar α y, tomando $g = 0$, probar distintas fuentes. Por ejemplo, fuentes constantes en el tiempo:

- $f_1(x, y) = \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y)$,
- $f_2(x, y) = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}(x)\chi_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}(y)$.

Fuentes que actúen durante un tiempo determinado y se apaguen:

- $f_3(x, y, t) = \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y)\chi_{[0,1](t)}$
- $f_4(x, y, t) = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}(x)\chi_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]}(y)\chi_{[0,1](t)}$

O fuentes que varíen en el espacio y el tiempo:

- $f_5(x, y, t) = \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(\pi y)(\operatorname{sen}(t) + 1)$,
- $f_6(x, y, t) = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}(x)\chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}(y)\chi_{[2(n-1),2n-1]}(t) + \chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}(x)\chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}(y)\chi_{[2n-1,2n]}(t), \quad n \in \mathbb{N}$

Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2017

Trabajo Práctico N° 5: Ajuste de formas geométricas.

En muchas aplicaciones es necesario resumir un conjunto de datos con una primitiva geométrica. Consideremos, por ejemplo, el caso de un círculo. Imaginemos la siguiente situación. Un robot provisto de un palpador puede obtener una serie de puntos sobre una circunferencia de eje cilíndrico, que puede estar afectado por desgaste o mala alineación. Se desea entonces calcular el radio y la posición del centro de su base a los datos medidos.

Una idea simple es la siguiente. Un círculo de centro (x_0, y_0) y radio r está descripto por la ecuación $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$. Desarrollando: $x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow$ $2xx_0 + 2yy_0 + (r^2 - x_0^2 - y_0^2) = x^2 + y^2$.

Si disponemos de N datos (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, N$, esperaríamos encontrar valores x_0, y_0 y r tales que se cumplen las N ecuaciones

$$2x_ix_0 + 2y_iy_0 + (r^2 - x_0^2 - y_0^2) = x_i^2 + y_i^2.$$

Este problema no tiene solución, pero podemos pensarlo en el sentido de cuadrados mínimos: Hallar A, B, C tales que $x_iA + y_iB + C = x_i^2 + y_i^2$, $i = 1, \ldots, N$ (en el sentido de que $\sum_{i=1}^{N}(x_iA + y_iB + C - (x_i^2 + y_i^2))^2$ sea mínima). Este problema siempre tiene solución, y luego podemos interpretar: $A = 2x_0$ ($\Rightarrow x_0 = A/2$), $B = 2y_0$ ($\Rightarrow y_0 = B/2$), $C = r^2 + x_0^2 + y_0^2$ ($\Rightarrow r = \sqrt{C - \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4}}$).

Ejercicio 1 Implementar esta idea en Octave, de modo que acepte una matriz de N pares (x_i, y_i) y devuelva los parámetros de la circunferencia.

Ejercicio 2 Chequear el programa anterior con datos generados según:

a) círculos completos, sin ruido

b) círculos completos, con ruido aleatorio

c) un arco de circunferencia de amplitud $0 < \alpha \leq 2\pi$. ¿Qué pasa para α chico (del orden de $\pi/4$, por ejemplo)?

El abordaje anterior es lo que se llama "ajuste algebraico". Son los cuadrados de los residuos de la representación algebraica de la figura geométrica los que se minimizan, y no la distancia cuadrática a la curva.

Ejercicio 3 Para implementar un "ajuste geométrico", se desea minimizar

$$\varepsilon_g(x_0, y_0, r) = \sum_{i=1}^{N} d_i^2(x_0, y_0, r),$$

donde $d_i(x_0, y_0, r)$ es la distancia del punto (x_i, y_i) al círculo de parámetros x_0, y_0, r.

a) Para resolver el problema, y estimar los valores x_0, y_0, r, utilizaremos el método de Newton para minimizar ε_g. El método de Newton está dado por:

$$v^{k+1} = v^k - H(v^k)^{-1}\nabla\varepsilon_g(v^k),$$

donde $H(v)$ es la matriz hessiana de ε_g evaluada en v. Se puede tomar como valor inicial, por ejemplo $v^0 = [v_1^0, v_2^0, v_3^0]'$, donde (v_1^0, v_2^0) es el punto promedio de los datos, y v_3^0 es el promedio de las distancias a ese centro.
Implementar un programa que reciba como input una función f y un punto z y calcule el vector gradiente de f evaluado en z, y un programa que calcule el hessiano de f evaluado en z. Ambos utilizando diferencias forward.

b) Chequear el comportamiento del ajuste geométrico, con los valores de x_0, y_0 y r por el método de Newton, sobre datos similares a los anteriores.