

## Ec. diferenciales con retardo - Práctica 3

1. Sean  $b, d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  continuas y  $T$ -periódicas tales que  $b(t) > d(t)$  para todo  $t$ . Probar que la ecuación de Nicholson no autónoma

$$u'(t) = -d(t)u(t) + b(t)u(t - \tau)e^{-u(t-\tau)}$$

tiene al menos una solución  $T$ -periódica positiva. *Sugerencia:* como en el ejercicio de la práctica anterior, probar que toda solución  $x$  con dato inicial  $\phi \leq M := \max_t \left( \frac{b(t)}{d(t)e} \right)$  verifica  $x(t) \leq M$  para todo  $t$ . Luego, elegir  $\varepsilon > 0$  tal que  $xe^{-x} \geq \varepsilon e^{-\varepsilon}$  para  $\varepsilon \leq x \leq M$  y  $\varepsilon \leq \ln \frac{b(t)}{d(t)}$  para todo  $t$ . Verificar que si  $\phi \geq \varepsilon$  entonces  $x(t) \geq \varepsilon$  para todo  $t$ .

2. Hallar condiciones suficientes para la existencia de soluciones  $T$ -periódicas positivas para las siguientes ecuaciones (asumir siempre que los parámetros son funciones  $T$ -periódicas positivas):

Modelos Logísticos:

$$\dot{x} = x(t) \left[ a(t) - \sum_i^n b_i(t)x(t - \tau_i(t)) \right]$$

$$\dot{x} = x(t) \left( a(t) - b(t) \int_{t-\tau(t)}^t c(s)x(s)ds \right)$$

Lasota-Wazewska:  $\dot{x} = -a(t)x(t) + c(t)e^{-b(t)x(t-\tau(t))}$

Mackey-Glass:  $\dot{x} = -a(t)x(t) + \frac{b(t)x(t-\tau(t))}{1 + x^n(t-\tau(t))}$

Gompertz:  $\dot{x} = -a(t)x(t) + b(t)x(t) \ln \frac{c(t)}{x(t-\tau(t))}$

Michaelis-Menten:  $\dot{x} = x(t) \left[ a(t) - \frac{b(t)x(t-\tau(t))}{1 + c(t)x(t-\tau(t))} \right]$

3. Consideremos el problema

$$X'(t) = f(t, X(t), X(t - \tau)) \tag{1}$$

con  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua,  $T$ -periódica en la primera variable y localmente Lipschitz en las últimas dos.

(a) Supongamos que existe  $R > 0$  tal que

$$\langle f(t, X, Y), X \rangle < 0 \quad (2)$$

para todo  $t$  y para todos los  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  tales que  $\|X\| = R, \|Y\| \leq R$ .  
Probar:

- i. Si  $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua tal que  $\|\phi\|_\infty \leq R$  entonces la solución  $X$  del problema (1) con condición inicial  $X_{t_0} = \phi$  está definida en  $[t_0 - \tau, +\infty)$ .
  - ii. El problema (1) tiene al menos una solución  $T$ -periódica.
- (b) Supongamos que ahora vale (2) para  $\|X\| = \|Y\| = R$ . Probar que existe  $\tau_* > 0$  tal que (1) tiene una solución  $T$ -periódica para  $\tau < \tau_*$ .

4. Sean  $T > 0$  y  $a \neq 0$ .

- (a) Probar que existe  $\tau^* > 0$  tal que el problema  $x'(t) = ax(t - \tau)$  no tiene soluciones  $T$ -periódicas no triviales para  $\tau < \tau^*$ .
- (b) Sea  $\tau < \tau^*$  fijo. Probar que existe una constante  $c > 0$  tal que para toda función  $T$ -periódica  $x$  de clase  $C^1$  vale

$$\|x\|_\infty \leq c\|x' - ax(\cdot - \tau)\|_\infty.$$

- (c) Sea  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  tal que  $f(0) = 0$  y  $f'(0) \neq 0$ . Probar que existe  $b^* > 0$  tal que para todo  $\tau < \tau^*$  y toda  $b$  continua  $T$ -periódica tal que  $\|b\|_\infty < b^*$  el problema

$$x'(t) = f(x(t - \tau)) + b(t)$$

tiene al menos una solución  $T$ -periódica. ¿Vale la conclusión cuando  $f'(0) = 0$ ?

- (d) Generalizar para cualquier valor  $x_e$  tal que  $f(x_e) = 0$ .
- (e) Dado  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario, encontrar  $f$  y  $b$  tal que el problema admita al menos  $n$  soluciones  $T$ -periódicas no constantes.