

Ec. diferenciales con retardo - Práctica 2

1. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y localmente Lipschitz en las dos últimas variables. Escribir el sistema $X'(t) = f(t, X(t), X(t - \tau))$ en la forma $X'(t) = F(t, X_t)$ y probar que F es continua y localmente Lipschitz en X .
2. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^n)^M \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y localmente Lipschitz en la segunda variable. Entonces para toda ϕ el problema de valores iniciales

$$X'(t) = f(t, X(t), X(t - \tau_1), \dots, X(t - \tau_M)), \quad X_{t_0} = \phi$$

tiene solución única definida en cierto intervalo maximal $[t_0, A)$. Además, si f tiene crecimiento a lo sumo lineal respecto de la segunda variable, es decir,

$$\|f(t, X, Y_1, \dots, Y_M)\| \leq a(t, Y_1, \dots, Y_M)\|X\| + b(t, Y_1, \dots, Y_M)$$

para ciertas funciones a y b localmente acotadas, entonces $A = +\infty$.

3. Sea $F : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y de clase C^1 respecto de X . ¿Vale siempre que F es localmente Lipschitz en X ?
4. Probar el teorema de existencia y unicidad por medio de la iteración de Picard

$$X_0(t) := \phi(0) \text{ para } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta, \quad (X_0)_{t_0} = \phi,$$

y

$$X_{n+1}(t) := \phi(0) + \int_{t_0}^t F(s, (X_n)_s) ds \text{ para } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta, \quad (X_{n+1})_{t_0} = \phi$$

5. Considerar el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) - x(t - \tau) \\ y'(t) = y(t) \end{cases}$$

- (a) Probar que si $\tau = 0$ las soluciones con condiciones iniciales no negativa permanecen no negativas.
- (b) ¿Siguiendo valiendo lo anterior para $\tau > 0$?

6. Sea $C_n^+ \subset \mathbb{R}^n$ el cono positivo cerrado, es decir,

$$C_n^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$$

y sea $f : \mathbb{R} \times C_n^+ \times C_n^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y de clase C^1 en las dos últimas variables. Supongamos que para todo j vale la siguiente condición:

$$x_j = 0 \Rightarrow f_j(t, x, y) = 0.$$

Probar que si las condiciones iniciales son no negativas, entonces la solución es no negativa.

7. Sea $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$ continua, decreciente y localmente Lipschitz y sea $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T a(s) ds = +\infty$. Para el problema $x'(t) = -a(t)x(t) + f(x(t - \tau))$, probar:

- (a) Las soluciones con condición inicial $\phi : [t_0 - \tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ están globalmente definidas y son estrictamente positivas para $t > 0$.
- (b) Si x e y son soluciones tales que $x(t) \geq y(t) \geq 0$ para todo $t \geq t_0$ entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - y(t) = 0$. *Sugerencia:* si $z(t) := x(t) - y(t)$ entonces $z'(t) + a(t)z(t) \leq 0$ para $t \geq t_0 + \tau$. En consecuencia, $v(t) := e^{A(t)}z(t)$, donde A es una primitiva de a , es decreciente.
- (c) Si el problema admite alguna solución T -periódica, entonces a es T -periódica.
- (d) Dos soluciones positivas T -periódicas se cruzan al menos dos veces en cada período.
- (e) Supongamos que $a(t) \geq 0$ para todo t . Si x e y son dos soluciones positivas, entonces existe t_0 tal que $|x(t) - y(t)| \leq \tau g(0)$ para todo $t \geq t_0$. *Sugerencia:* Si t_0 y t_1 son ceros consecutivos de $z := x - y$ tales que $t_1 > t_0 + \tau$ entonces

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_1} |z(t)| = \max_{t_0 \leq t \leq t_0 + \tau} |z(t)|.$$

Por otro lado, si $z > 0$ en $(t_0, t_0 + \tau)$ entonces $z' + az < g(0)$. Deducir que

$$z(t) \leq g(0) \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(r) dr} ds \leq (t - t_0)g(0).$$

8. Para la ecuación de Nicholson, probar:

- (a) Las soluciones con condición inicial positiva están globalmente definidas y son positivas.
- (b) Si x es solución, entonces existe t_0 tal que $x(t) \leq \frac{b}{de}$ para todo $t \geq t_0$. ¿Contradice esto el hecho de que si $b > d$ entonces $x^* = \ln \frac{b}{d}$ es un punto de equilibrio?

(c) Si $b > de$, deducir del ejercicio previo que si x es una solución tal que $x(t) \geq 1$ para $t \gg 0$ entonces x oscila alrededor del equilibrio $x^* = \ln \frac{b}{a}$ o bien $x(t) \rightarrow x^*$ para $t \rightarrow +\infty$.

9. Enunciar y probar un teorema de existencia y unicidad para una ecuación de orden n .