Ec. diferenciales con retardo - Práctica 1

1. Consideremos la ecuación lineal

$$u'(t) = a(\tau)u(t) + b(\tau)u(t-\tau) \qquad t > 0$$

   con $a(\tau), b(\tau) \in \mathbb{R}$. Probar:

   (a) Si $a(\tau) + b(\tau) > 0$, entonces el equilibrio nulo es inestable.

   (b) Si $a(\tau) + b(\tau) < 0$, y $b(\tau) \geq a(\tau)$ entonces el equilibrio nulo es asintóticamente estable.

   ¿Qué ocurre cuando $a(\tau) + b(\tau) < 0$, y $b(\tau) < a(\tau)$?

2. Para la ecuación de Nicholson

$$u'(t) = -du(t) + bu(t-\tau)e^{-u(t-\tau)}$$

   con $b, d > 0$, probar:

   (a) Si $b > d$, entonces existe un equilibrio positivo u^*. Determinar condiciones suficientes para la estabilidad asintótica local de u^*.

   (b) Si $b < d$ entonces 0 es el único equilibrio no negativo, que resulta localmente asintóticamente estable.

   (c) Probar que si $b \leq d$ entonces 0 es un atractor global para las soluciones positivas. Más precisamente, si u es solución con dato inicial $\phi > 0$, entonces $u(t)$ está definida y es positiva para todo $t > 0$, con $u(t) \to 0$ para $t \to +\infty$. *Sugerencia*: verificar primero que u no se puede anular. Luego, usar que si $u'(t) \geq 0$ entonces $u(t) \leq f(u(t-\tau))$, con $f(x) = xe^{-x}$.

3. Deducir una fórmula de variación de parámetros para el sistema lineal

$$X'(t) = AX(t) + \sum_{k=1}^{N} B_k X(t - \tau_k)$$

   para $A, B_1, \ldots, B_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y retardos arbitrarios $\tau_1, \ldots, \tau_N > 0$. Mostrar que la ecuación característica tiene la forma

$$h(\lambda) := P(\lambda, e^{-\tau_1 \lambda}, \ldots, e^{-\tau_N \lambda}) = 0,$$

   donde P es un polinomio de grado n en $N + 1$ variables.

4. Para $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, probar que

$$h(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A) + e^{-2\tau\lambda}\det(B) + e^{-\tau\lambda}(d_{AB} + d_{BA} - \mathrm{Tr}(B)\lambda),$$

donde d_{XY} denota el determinante de la matriz formada por la primera columna de X y la segunda columna de Y.

5. Sean $L : C([-\tau, 0], \mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^n$ lineal y continua y $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}^n$ continua. Mostrar que las soluciones $X(t, \phi, f)$ de la ecuación $X'(t) = L(X_t) + f(t)$ con dato inicial $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{C}^n)$ se pueden escribir en la forma
$$X(t) = X(t, \phi, 0) + X(t, 0, f).$$

6. Encontrar la ecuación característica para el problema con retardo distribuido
$$x'(t) = ax(t) + \int_{t-\tau}^{t} b(t-s)x(s)\, ds.$$

7. Sea $L : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ lineal continua. Probar que λ es raíz característica si y solo si $\overline{\lambda}$ es raíz característica.

8. Considerar el siguiente modelo para el control de los niveles de testosterona:
$$\begin{aligned} R'(t) &= f(T(t)) - b_1 R(t) \\ L'(t) &= g_1(R(t)) - b_2 L(t) \\ T'(t) &= g_2(L(t-\tau)) - b_3 T(t) \end{aligned}$$
donde todas las constantes son positivas y f es una función positiva y estrictamente decreciente en $[0, +\infty)$. Probar que existe un único punto de equilibrio con coordenadas positivas y estudiar su estabilidad.

9. (a) Sean $p(\lambda) = \lambda^2 + r\lambda + s$ y $q \in \mathbb{R}$. Probar que todas las soluciones de la ecuación $p(\lambda) + qe^{-\tau\lambda} = 0$ tienen parte real negativa para todo $\tau \geq 0$, bajo alguna de las siguientes condiciones:
   i. $\frac{r^2}{2} \geq s > |q|$.
   ii. $\frac{r^2}{2} < s$ y $|q| < \frac{r}{2}\sqrt{4s - r^2}$.

   Sugerencia: empleando el principio del mínimo, probar que existe $y \geq 0$ tal que $|p(iy)| \leq |p(\lambda)|$ para todo λ tal que $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$. Calcular explícitamente el valor $|p(iy)|^2$.

   (b) Hallar matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que lo anterior se pueda aplicar al sistema $X'(t) = AX(t) + BX(t-\tau)$.