Ecuaciones Diferenciales A/B – 2° cuatrimestre 2023

Práctica 2: Ecuaciones de primer orden

Ejercicio 1. Resolver los siguientes problemas ($n \geq 2$).

1. $\sum_{i=1}^n u_{x_i}(x) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i\right) \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad u|_{x_1=0} = x_2,$

2. $x \cdot \nabla u(x) = |x|^2 \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad u|_{x_1=1} = 3x_n.$

Sugerencia: Considerar primero el caso $n = 2$ y luego el caso general donde $n \geq 2$.

Ejercicio 2. Considerar la ecuación:

$$xu_x(x,y) - yu_y(x,y) = 0 \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Verificar que la solución general es de la forma $u(x,y) = f(xy)$, con $f \in C^1(\mathbb{R})$.
2. Encontrar la solución que satisface $u(x,x) = x^2$.
3. ¿Qué pasa con el problema del ítem anterior si el dato se da sobre la curva $y = 1/x$?

Ejercicio 3.

1. Probar que no existe solución de la ecuación
$$u_x(x,y) + u_y(x,y) = u(x,y) \qquad x, y \in \mathbb{R},$$
que satisfaga $u = 1$ sobre la recta $y = x$.
2. Probar que la solución de la ecuación
$$u_x(x,y) + u_y(x,y) = u(x,y)^2 \qquad x, y \in \mathbb{R},$$
cuyo gráfico contiene a la recta $x = -y = z$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.
3. Hallar la solución de la ecuación
$$(x^2 + y^2)u_x(x,y) + 2xyu_y(x,y) = (x+y)u(x,y) \qquad x, y \in \mathbb{R},$$
que satisface $u(0,y) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Resolver los siguientes problemas, siendo L el operador diferencial definido por:

$$Lu = x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} - 3u.$$

1. $Lu = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty), \qquad u(x,y,0) = xy \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

2. $Lu = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty), \qquad u(x,y,0) = f(x,y) \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

En el segundo problema, imponer condiciones adecuadas de diferenciabilidad a f.

Ejercicio 5. Consideramos el problema de transporte en una semirrecta $[0,+\infty)$ con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u_t + vu_x = f(x,t) & x, t > 0 \\ u(x,0) = h(t) & t > 0 \\ u(x,0) = g(t) & t > 0 \end{cases}$$

Si $f \in C([0,\infty) \times [0,\infty))$, $\partial_x f \in C([0,\infty) \times [0,\infty))$ y $g, h \in C^1([0,\infty)$ verifican las condiciones de compatibilidad

$$g(0) = h(0), h'(0) + vg'(0) = f(0,0)$$

entonces existe un única solución de este problema de clase C^1.

Sugerencia: Use método de las carácterísticas, separando los casos $x - tv \geq 0$ y $x - tv < 0$.

Ejercicio 6. Considerar el problema:

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty), \qquad\qquad u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Las curvas características $(x(t), t)$ para este problema se definen mediante la ecuación

$$x'(t) = u(x(t), t) \qquad\qquad t > 0.$$

1. Probar que si u es solución entonces u es constante sobre las curvas características.
2. Obtener explícitamente las curvas características y verificar que se trata de rectas determinadas por los datos iniciales.
3. Demostrar que si $x_1 < x_2$ y $u_0(x_1) > u_0(x_2) > 0$, entonces las curvas características que pasan por los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ se intersecan en un punto $P = (\bar{x}, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$ y deducir que una solución no puede ser continua en P.

Ejercicio 7. Repetir el ejercicio 6 para la ecuación

$$u_t + (f(u))_x = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

donde $f'' > 0$ y $f'(u_0) > 0$. Las características se definen ahora mediante la ecuación

$$x'(t) = f'(u(x(t), t)) \qquad\qquad t > 0.$$

Concluir que, en general, es imposible hallar una solución continua, independientemente de la suavidad de f.