Problemas para el final de álgebra lineal

2do cuatrimestre – 2023

En todo este documento $\Bbbk$ denota un cuerpo cualquiera y V, W son espacios vectoriales sobre $\Bbbk$. Salvo que se indique explícitamente suponemos que los espacios son de dimensión finita.

Durante el final deberán tener una copia de esta lista de ejercicios. Les voy a indicar seis ejercicios, de los cuales deberán entregar cuatro (quizás les dé indicaciones extra durante el final, del estilo "al menos dos de estos tres", etc.). Para resolver cada ejercicio puede usar el enunciado de un ejercicio anterior sin necesidad de demostrarlo. Esta promoción solo es válida para quienes rindan su final a lo sumo en las fechas de febrero/marzo de 2024.

1. Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V, y sea $\{w_1, \dots, w_m\}$ un conjunto linealmente independiente en V. Probar que existe $\sigma \in S_n$ tal que para cada r entre 0 y n se tiene que $\{w_1, \dots, w_r, v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(n)}\}$ es una base de V.

2. Sean $S, T \subset V$ subespacios. Probar que
$$\dim S + T = \dim S + \dim T - \dim S \cap T.$$
Probar con un ejemplo que no vale la fórmula
$$\begin{aligned}\dim S + T + U = {} & \dim S + \dim T + \dim U \\ & - \dim S \cap T - \dim S \cap U - \dim T \cap U + \dim S \cap T \cap U.\end{aligned}$$

3. Mostrar que V es la unión de finitos subespacios si y solo si $\Bbbk$ es finito. Probar que en ese caso los subespacios pueden ser de dimensión 1.

4. Sea $\Bbbk$ un cuerpo finito.
   a) Probar que $\#\Bbbk = p^r$ donde p es un primo y $r \in \mathbb{N}$.
   b) Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Hallar el número de bases distintas de $\Bbbk^n$ para todo n en función de p y r.

5. Sean $\Bbbk, \ell$ cuerpos con $\Bbbk \subset \ell$. Recordemos que ℓ es un $\Bbbk$-espacio vectorial, y supongamos que $\dim_{\Bbbk} \ell = d < \infty$.
   a) Sea V un espacio vectorial sobre ℓ de dimensión r. Probar que también es un espacio vectorial sobre $\Bbbk$ y calcular su dimensión sobre $\Bbbk$.
   b) Sea ahora W un espacio vectorial sobre $\Bbbk$ de dimensión s. Probar que $V = \hom_{\Bbbk}(\ell, W)$ es un espacio vectorial sobre ℓ y calcular su dimensión.

6. Sea $f : V \to W$. Probar que V es de dimensión finita si y solo si $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ son ambos de dimensión finita, y que en ese caso

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f.$$

7. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subset V$ bases ordenadas, sea $c_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ la transformación de cambio de coordenadas, y sea C la matriz tal que $c_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(x) = C \cdot x$. Probar que $C = [\mathsf{Id}_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

8. Sean $f, g : V \to V$ transformaciones lineales tales que $f \circ g - g \circ f = \mathsf{Id}_V$. Probar que la característica del cuerpo divide a $\dim V$.

9. Sea $S \subset V$ un subespacio. Probar que $\dim S + \dim S^\circ = \dim V$.

10. Sea $f : V \to W$ una transformación lineal.

    a) Probar que $\ker f^* = (\operatorname{Im} f)^\circ$.

    b) Probar que $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^*$.

    c) Concluir que el rango fila de una matriz es igual a su rango columna.

11. El *doble dual* de V es el espacio $V^{**} = (V^*)^*$.

    a) Para cada $v \in V$ definimos la función $ev_v : V^* \to \Bbbk$ dada por $ev_v(\varphi) = \varphi(v)$. Probar que $ev_v \in V^{**}$.

    b) Probar que $v \in V \mapsto ev_v \in V^{**}$ es un isomorfismo.

    c) Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Probar que $f^{**}(ev_v) = ev_{f(v)}$.

12. Sea $\mathcal{B} \subset V^*$ una base. Probar que existe una base de V tal que $\mathcal{B}$ es su base dual.

13. Sea $A \in \Bbbk^{n\times n}$. Probar que $B \in \Bbbk^{n\times n} \mapsto \det(A)^{-1}\det(AB)$ es una forma n-multilineal alternada en el espacio de columnas que vale 1 sobre la matriz identidad. Concluir que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

14. Probar que el determinante de una matriz antisimétrica de tamaño impar es 0 si $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$. Hallar un contraejemplo en característica 2.

15. Sea $A \in M_n(\Bbbk)$. Probar que el rango de A es mayor o igual a r si y solo si A tiene un menor de tamaño $r \times r$ con determinante no nulo.

16. Sea $\Bbbk = \mathbb{C}$ y sea $f \in \operatorname{End}(V)$. Probar que existe una base $B \subset V$ tal que $[f]_B$ es triangular superior.

17. Sean $f, g : V \to V$ transformaciones lineales diagonalizables tales que $f \circ g = g \circ f$. Probar que existe una base de V cuyos vectores son autovectores de f y de g.

18. Probar que la operación $A \in M_n(\Bbbk) \mapsto A^t \in M_n(\Bbbk)$ es una transformación lineal diagonalizable y hallar sus autovalores, autovectores y autoespacios.

19. Probar que una transformación lineal $f \in \operatorname{End}(V)$ es diagonalizable si y solo si para cada $\lambda \in \Bbbk$ la dimensión de $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_V)$ es igual a la multiplicidad de λ como raíz de χ_f.

20. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Usando el teorema de descomposición primaria, probar que existe $v \in V$ tal que $m_{f,v} = m_f$. A continuación, probar que para cada polinomio p tal que $p \mid m_f$ existe un vector w tal que $m_{f,w} = p$.

21. Supongamos que $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ satisfacen que existe $C \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A = CBC^{-1}$. Probar que existe $D \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A = DBD^{-1}$. **Extra:** ¿Vale el mismo resultado si cambiamos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Q}$?

22. Sea $d = \dim V$, y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Asociamos a f la sucesión $\boldsymbol{a}(f) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dada por $a_n = \dim \ker f^n$. Probar las siguientes afirmaciones.

    a) Para cada $n \geq 0$ se tiene que $a_n \leq a_{n+1}$.

    b) Para cada $n \geq 0$ se tiene que $a_{n+2} - a_{n+1} \leq a_{n+1} - a_n$.

    c) Si $n \geq d$ entonces $a_{n+1} = a_n \leq d$.

    d) Para cualquier sucesión $\boldsymbol{a}$ que cumpla las tres propiedades anteriores existe una transformación lineal $f : V \to V$ tal que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(f)$.

23. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que su forma de Jordan tiene un único bloque si y solo si $m_f = \chi_f = (X - \lambda)^{\dim V}$ para algún $\lambda \in \mathbb{k}$.

24. Probar que una matriz con coeficientes en un cuerpo algebraicamente cerrado es semejante a su traspuesta. ¿Es cierto este resultado sobre $\mathbb{R}$?

A partir de este punto todos los espacios vectoriales son reales o complejos y tienen un producto interno.

25. Sea $S \subset V$ un subconjunto. Probar que $(S^{\perp})^{\perp} = \langle S \rangle$.

26. Sea $Q \in M_n(\mathbb{k})$. Definimos una función $(-|-)_Q : \mathbb{k}^n \times \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}$ como

    $$(v|w)_Q = v^* Q w.$$

    Probar que $(-|-)_Q$ es un producto interno si y solo si $Q = Q^*$ y además todos sus autovalores pertenecen a $\mathbb{R}_{>0}$.

27. Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre $\mathbb{C}$, y sea $f \in \mathrm{End}(V)$. Notamos $\mathfrak{R}(f) = \frac{f+f^*}{2}$ y $\mathfrak{I}(f) = \frac{f-f^*}{2i}$.

    a) Probar que $\mathfrak{R}(f)$ y $\mathfrak{I}(f)$ son autoadjuntas y que $f = \mathfrak{R}(f) + i\mathfrak{I}(f)$.

    b) Probar que $f \circ f^* = f^* \circ f$ si y solo si $\mathfrak{R}(f) \circ \mathfrak{I}(f) = \mathfrak{I}(f) \circ \mathfrak{R}(f)$. En este caso decimos que f es *normal*.

    c) Probar que f es normal si y solo si existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ formada por autovectores de f.

28. Sea f un operador normal sobre un espacio vectorial complejo con producto interno. Probar que existe un polinomio $p \in \mathbb{C}[X]$ tal que $f^* = p(f)$.