ALGEBRA LINEAL - Práctica N°7 - Segundo cuatrimestre de 2023

Subespacios invariantes - Forma de Jordan

Ejercicio 1.

i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 2y,\, 2x - 2y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f-invariantes.

ii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación $\mathbb{R}$-lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(ver ejercicio 2 (iii) Práctica 3). Para cada θ estudiar si g_θ es diagonalizable, y hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean g_θ-invariantes. ¿Qué cambia si g_θ se interpreta en $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{C}$-lineal?

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una tranformación lineal nilpotente tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

i) Probar que para cada $0 \leq i \leq n$ existe un subespacio S_i de $\mathbb{R}^n$ de dimensión i que es f-invariante.

ii) Probar que existe un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que es f-invariante pero que no admite un complemento f-invariante.

Ejercicio 3.

i) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal diagonalizable. Si S es un subespacio de V que es f-invariante, probar que $f : S \to S$ es diagonalizable.

ii) Sean $A, B \in K^{n\times n}$ tales que $A.B = B.A$ y sea $E_\lambda(A) = \{x \in K^n \,/\, A.x = \lambda.x\}$. Probar que $E_\lambda(A)$ es B-invariante.

iii) Sean $A, B \in K^{n\times n}$ dos matrices diagonalizables tales que $A.B = B.A$. Probar que existe $C \in GL(n, K)$ tal que $C.A.C^{-1}$ y $C.B.C^{-1}$ son diagonales. (Es decir, A y B se pueden diagonalizar simultáneamente.)

Ejercicio 4. Sean $A, A' \in K^{n\times n}$ las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A'.

ii) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tales que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A'.

iii) Sea B una base de K^n y sea $f : K^n \to K^n$ tal que $|f|_B = A$. Probar que no existen subespacios propios f-invariantes S y T de K^n tales que $K^n = S \oplus T$.

Ejercicio 5.

i) Hallar $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $m_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 8$. Decidir si A es diagonalizable.

ii) Hallar $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tal que $m_A(X) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$. Decidir si A es diagonalizable.

Definiciones: Dados $v \in K^n$ y $A \in K^{n\times n}$, escribimos $< v >_A = < v, Av, A^2v, \dots >$. Decimos que v es un *vector cíclico para* A si $< v >_A = K^n$. Si V es un espacio vectorial, $v \in V$ y $f : V \to V$ es una transformación lineal, definimos $< v >_f$ por $< f^i(v) : i \geq 0 >$ y decimos que v es f-cíclico si $< v >_f = V$.

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = < v >_A$?

Ejercicio 7. Si $f : K^n \to K^n$ es una transformación lineal tal que f^2 tiene un vector cíclico (es decir, $K^n = < v >_{f^2}$), probar que f tiene un vector cíclico. ¿Es válida la recíproca?

Ejercicio 8. Sea K un cuerpo arbitrario, se consideran las dos afirmaciones siguientes:

(*) $A, B \in K^{n\times n}$ *son semejantes.*

(**) $A, B \in K^{n\times n}$ *cumplen que* $\chi_A = \chi_B$ *y* $m_A = m_B$.

Probar que las afirmaciones (*) y (**) son equivalentes para cualquier par de matrices A, B si y solo si $n \leq 3$. **Ejercicio 9.** Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que sus autovalores son todos reales. Probar que A es semejante a una matriz con coeficiente reales.

Ejercicio 10. Hallar la forma y una base de Jordan para cada una de las siguientes matrices:

i) $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&-1&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0 \\ -1&0&-1&0&0&1&0 \\ -1&-1&-1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&-1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 11. Sean $A_i \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ $(1 \leq i \leq 6)$ matrices en nilpotentes tales que $m_{A_i} = X^3$ $(1 \leq i \leq 6)$. ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

Ejercicio 12. Sean A, $B \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7\times 7}$?

Ejercicio 13. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j, \\ 1 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Ejercicio 14.

i) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotente tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

ii) Decidir si existe $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ tal que $m_A(X) = X^5$, $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^7$ una transformación lineal y sea B una base de $\mathbb{C}^7$ tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Hallar $\mathcal{X}_f$ y m_f.

ii) Sea λ un autovalor de f y sea $m = \text{mult}(\lambda, \mathcal{X}_f)$. Se definen $E_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 : f(v) = \lambda\, v\}$ y $V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 : (\lambda\, Id - f)^m(v) = 0\} = \text{Nu}((\lambda\, Id - f)^m)$.

¿Para qué autovalores λ de f se tiene que $E_\lambda = V_\lambda$?

iii) Para cada autovalor λ de f, ¿cuál es la menor potencia k tal que $V_\lambda = \text{Nu}((\lambda\, Id - f)^k)$?

iv) Si λ es un autovalor de f, se nota f_λ a la restricción de $\lambda\, Id - f$ a V_λ. Calcular $\dim(\text{Im}(f_\lambda))$ y $\dim(\text{Im}(f_\lambda^2))$ para cada λ.

Ejercicio 16. Sea V un K-espacio vectorial, sea $f : V \to V$ una transformación lineal y sea $P \in K[X]$.

i) Probar que $\text{Nu}(P(f))$ e $\text{Im}(P(f))$ son subespacios invariantes por f.

ii) Probar que si un autovalor λ de f es raíz de P, entonces $E_\lambda \subseteq \text{Nu}(P(f))$.

iii) Probar que si un autovalor λ de f no es raíz de P, entonces $E_\lambda \subseteq \text{Im}(P(f))$.

Ejercicio 17. Hallar la forma y una base de Jordan de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 18. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = < e^x,\, x\,e^x,\, x^2 e^x,\, e^{2x} >$. Sea $\delta : V \to V$ la transformación lineal definida por $\delta(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para δ.

Ejercicio 19. Si $A\,,\,B \in \mathbb{C}^{\,4\times 4}$ son las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

decidir si A y B son semejantes.

Ejercicio 20. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

Ejercicio 21. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^4(X-3)^2; \quad m_A(X) = (X-2)^2(X-3)^2.$

ii) $\mathcal{X}_A(X) = (X-7)^5; \quad m_A(X) = (X-7)^2.$

iii) $\mathcal{X}_A(X) = (X-2)^7; \quad m_A(X) = (X-2)^3.$

iv) $\mathcal{X}_A(X) = (X-3)^4(X-5)^4; \quad m_A(X) = (X-3)^2(X-5)^2.$

Ejercicio 22. Sea $A \in \mathbb{C}^{15\times 15}$ una matriz con autovalores λ_1, λ_2, λ_3 que cumple, simultáneamente, las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{rg}(A-\lambda_1\,I) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1\,I)^2 = 11, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1\,I)^3 = 10, & \mathrm{rg}(A-\lambda_1\,I)^4 = 10, \\ \mathrm{rg}(A-\lambda_2\,I) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2\,I)^2 = 11, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2\,I)^3 = 10, & \mathrm{rg}(A-\lambda_2\,I)^4 = 9, \\ \mathrm{rg}(A-\lambda_3\,I) = 13, & \mathrm{rg}(A-\lambda_3\,I)^2 = 12, & \mathrm{rg}(A-\lambda_3\,I)^3 = 11. & \end{array}$$

Hallar su forma de Jordan.

Ejercicio 23. Dar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{14\times 14}$ que verifica, simultáneamente:

$$m_A = (X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)^2(X-\lambda_4)^3 \quad (\text{con } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j),$$
$$\mathrm{rg}(A-\lambda_1 I) = 11,\ \mathrm{rg}(A-\lambda_1 I)^2 = 10,\ \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I) = 12,\ \mathrm{rg}(A-\lambda_3 I)^2 = 10 \text{ y}$$
$$\mathrm{rg}(A-\lambda_4 I) = 13.$$

Ejercicio 24. Sean $x,\,y \in \mathbb{C}^n$ y $A(a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $a_{ij} = x_i\,y_j$.

i) Calcular todos los autovalores y autovectores de A.

ii) Calcular las posibles formas de Jordan de A.

Ejercicio 25. Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ una matriz tal que $m_A = X^6$ y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A. Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.

Ejercicio 26. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar $B \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ tal que $B^2 = A$.

Ejercicio 27. Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$. Se define una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha\,, \quad a_1 = \beta, \\ a_{n+2} = 4\,a_{n+1} - 4\,a_n \quad (n \in \mathbb{N}_0). \end{cases}$$

Hallar una fórmula para el término general a_n para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 28. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x_1'(t) &=& 3\,x_1(t) - x_2(t), \\ x_2'(t) &=& x_1(t) + x_2(t), \\ x_3'(t) &=& -x_2(t) + 2\,x_3(t), \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 1$.