ALGEBRA LINEAL - Práctica N°3 - Segundo cuatrimestre de 2023.

Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales.

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1 + \sqrt{2}\,x_3\,,\ x_1 - \frac{1}{2}x_2)$

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2\,,\ |x_1|)$

iii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) = \overline{z}$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial)

iv) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3},\ f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

v) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3,\ f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

Ejercicio 2. Interpretar geométricamente las siguientes aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

i) $f(x, y) = (x, 0)$

ii) $f(x, y) = (x, -y)$

iii) $f(x, y) = (x \cos t - y \operatorname{sen} t\,,\ x \operatorname{sen} t + y \cos t)$

Ejercicio 3. Encontrar una función $f : V \to V$ (para un K-espacio vectorial V conveniente) que cumpla $f(v + w) = f(v) + f(w)$ para cualquier par de vectores $v\,,\ w\ \in V$ pero que no sea una transformación lineal. Análogamente, encontrar una función $g : V \to V$ que cumpla $g(\lambda\, v) = \lambda\, g(v)$ para cualquier escalar $\lambda \in K$ y cualquier vector $v \in V$, pero que no sea una transformación lineal.

Ejercicio 4.

i) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha f, determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.

ii) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$, $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?

iii) Sean f, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$f(1, 0, 1) = (1, 2, 1), \quad f(2, 1, 0) = (2, 1, 0), \quad f(-1, 0, 0) = (1, 2, 1),$$
$$g(1, 1, 1) = (1, 1, 0), \quad g(3, 2, 1) = (0, 0, 1), \quad g(2, 2, -1) = (3, -1, 2).$$

Determinar si $f = g$.

iv) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

v) Hallar una fórmula para todas las tranformaciones lineales $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ que satisfacen $f(X^2 + X - 1) = (1, 2)$, $f(2X + 3) = (-1, 1)$ y $f(X^2 - X - 4) = (2, 1)$.

Ejercicio 5. Cuando sea posible, calcular bases del núcleo y de la imagen para cada tranformación lineal de los Ejercicios 1 y 4 y decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. Si f es un isomorfismo, calcular f^{-1}.

Ejercicio 6. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Calcular el núcleo y la imagen de f, de g y de $g \circ f$.

Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos. En caso que se pueda, calcular su inversa.

Ejercicio 7. Sean $g : V \to V'$ y $f : V' \to V''$ transformaciones lineales. Probar:

i) $\mathrm{Nu}(g) \subseteq \mathrm{Nu}(f \circ g)$.

ii) Si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Nu}(f \circ g)$.

iii) $\mathrm{Im}(f \circ g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

iv) Si $\mathrm{Im}(g) = V'$, entonces $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$.

Ejercicio 8.

i) Sean $S, T \subset \mathbb{R}^4$ los subespacios definidos por $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_4 = 0\,,\ x_2 - x_3 = 0\}$. ¿Existe un isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?

ii) ¿Existe un monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?

iii) ¿Existe un epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?

iv) Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. ¿Existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathrm{Im}(f)$?

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes casos encontrar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga lo pedido:

i) $(1, 1, 0) \in \mathrm{Nu}(f)$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

ii) $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = <(1, 1, 2)>$

iii) $f \neq 0$ y $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$

iv) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$

v) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$

vi) $\mathrm{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

Ejercicio 10. En cada uno de los siguientes casos construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla:

i) $\mathrm{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

ii) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

iii) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) = <(1, 1, 1)>$

Ejercicio 11. Sea V un K-espacio vectorial y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Se dice que f es *nilpotente* si existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $f^s = 0$.

i) Probar que si f es nilpotente, entonces f no es un monomorfismo ni un epimorfismo.

ii) Si V es de dimensión n probar que f es nilpotente si y solo si $f^n = 0$.

(Sugerencia: analizar si las inclusiones $\mathrm{Nu}(f^i) \subseteq \mathrm{Nu}(f^{i+1})$ son estrictas o no).

iii) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Se define una transformación lineal $f : V \to V$ de la siguiente forma:

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & \text{si } i = n \end{cases}$$

Probar que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

Ejercicio 12. Sea $S = < (1,1,0,1), (2,1,0,1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

i) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$.

ii) Hallar ecuaciones para S (usar i)).

iii) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $< (1,1,0,1), (2,1,0,1) > + (0,1,1,2)$.

Ejercicio 13.

i) Sea $S \subset K^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo. Encontrar una transformación lineal $f : K^n \to K^n$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$.

ii) Sea $T \subset K^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal no homogéneo. Encontrar una transformación lineal $f : K^n \to K^n$ y un vector $y \in K^n$ tales que $T = f^{-1}(y)$.

Ejercicio 14. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal y sean B, B' bases de V. Calcular $|f|_{BB'}$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3\,x_1 - 2\,x_2 + x_3, 5\,x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3)$,
$B = \{(1,2,1), (-1,1,3), (2,1,1)\}$ y $B' = \{(1,1,0), (1,2,3), (-1,3,1)\}$

ii) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2.x_1 - i\,x_2, x_1 + x_2)$, $B = B'$ es la base canónica de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

iii) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2\,x_1 - i\,x_2, x_1 + x_2)$, $B = B' = \{(1,0), (0,1), (i,0), (0,i)\}$ considerando a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

iv) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $B = B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$.

Ejercicio 15. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

i) Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B'?

ii) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.

iii) Describir el conjunto $f^{-1}(\{w_1 - 3\,w_3 - w_4\})$.

Ejercicio 16. Sea V un K-espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V. Sea $f : V \to V$ la transformación lineal tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar $|f^{-1}|_B$ y calcular $f^{-1}(\{v_1 - 2v_2 + v_4\})$.

Ejercicio 17. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea B una base de V.

i) Sea $tr : \mathrm{Hom}(V, V) \to K$ la aplicación definida por $tr(f) = tr(|f|_B)$. Probar que $tr(f)$ no depende de la base B elegida. La aplicación $tr(f)$ se llama la *traza* del endomorfismo f.

ii) Probar que $tr : \mathrm{Hom}(V, V) \to K$ es una transformación lineal.

Ejercicio 18. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, $U = \{v_1 + v_3, v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ y $U' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$, y sea E la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad |f|_{UU'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinar U'.

Ejercicio 19.

i) Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la trasformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

y sea $v = (1, 0, 0, 0)$. Probar que $B = \{v, f(v), f^2(v), f^3(v)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$. Calcular $|f|_B$.

ii) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Probar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 1, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

(Sugerencia: elegir $v_1 \notin \mathrm{Nu}(f^{n-1})$).

Ejercicio 20. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ un proyector. Probar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j;\ i \leq \dim(\mathrm{Im}(f)), \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Ejercicio 21. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

i) Determinar bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices $C,\ D \in GL(3,\mathbb{R})$ tales que

$$C \cdot A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 22. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $b \in K^m$. Se considera el sistema $A \cdot x = b$ y sea $(A \mid b)$ su matriz ampliada. Probar que $A \cdot x = b$ tiene solución $\iff$ $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \mid b)$.

Ejercicio 23. Sea $A \in K^{m\times n}$, $\mathrm{rg}(A) = s$ y sea $T = \{X \in K^{n\times r} / \ A.X = 0\}$. Calcular $\dim T$.

Ejercicio 24. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times r}$. Probar que $\mathrm{rg}(A \cdot B) \le \mathrm{rg}(A)$ y $\mathrm{rg}(A \cdot B) \le \mathrm{rg}(B)$.

Ejercicio 25. Sean $A,\ D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Determinar C_1 , C_2 , C_3 y $C_4 \in GL(3,\mathbb{R})$ tales que

$$C_1 \cdot A \cdot C_2 = C_3 \cdot D \cdot C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Determinar $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y bases B, B', B_1 y B_1' de $\mathbb{R}^3$ tales que $|f|_{BB'} = A$ y $|f|_{B_1 B_1'} = D$.

Ejercicio 26. Dadas $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, decidir si existen matrices $P, Q \in GL(n,\mathbb{R})$ tales que $A = P \cdot B \cdot Q$.

i) $n = 2,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$ ii) $n = 3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$

Ejercicio 27. Sean $A,\ B \in K^{n\times n}$. Decimos que A es *semejante* a B (y lo notamos $A \sim B$) si existe $C \in GL(n, K)$ tal que $A = C \cdot B \cdot C^{-1}$.

i) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

ii) Sean $A,\ A' \in K^{n\times n}$ tales que $A \sim A'$. Probar que $tr(A) = tr(A')$.

iii) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

¿Existen $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que $|f|_B = A$ y $|f|_{B'} = A'$?