ALGEBRA LINEAL - Práctica N°1 - Segundo cuatrimestre de 2023

Espacios Vectoriales

Ejercicio 1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos y los sistemas homogéneos asociados sobre $K = \mathbb{R}$. ¿Cambia algo si $K = \mathbb{Q}$? ¿Y si $K = \mathbb{C}$?

i) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

Ejercicio 2. Determinar los $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema admite solución.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = \alpha_1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = \alpha_2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

Ejercicio 3.

i) Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que cada uno de los siguientes sistemas tiene alguna solución no trivial y, para esos valores de k, resolverlos.

(a) $\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + k^2 x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} kx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \\ k^3 x_1 + x_2 + k^3 x_3 + kx_4 = 0 \\ x_1 + k^2 x_2 + kx_3 + kx_4 = 0 \end{cases}$

ii) Determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solución única, no tiene soluciones o tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2 x_3 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Resolver el siguiente sistema en $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} i\,x_1 - (1+i)x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2i\,x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 5. Resolver el siguiente sistema en $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Probar que si un sistema de ecuaciones lineales en el que todos los coeficientes son racionales tiene una solución en $\mathbb{R}$ entonces también tiene una solución en $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 7. Probar que el conjunto V, con la suma y el producto por escalares de K definidos a continuación, es un espacio vectorial sobre K.

i) $V = K^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) : a_i \in K \ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$ es el conjunto de todas las sucesiones de elementos de K.

$+ \ : \ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$

$. \ : \ k.(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (k.a_i)_{i\in\mathbb{N}}$

ii) $V = \mathbb{R}_{>0}$, $K = \mathbb{Q}$.

$\oplus \ : \ a \oplus b = a.b$

$\otimes \ : \ \frac{m}{n} \otimes a = \sqrt[n]{a^m}$

iii) $V = \mathbb{Z}_3[X]/X^2 + 1$, $K = \mathbb{Z}_3$.

$+ \ : \ \overline{f} + \overline{g} = \overline{f+g}$

$. \ : \ k.\overline{f} = \overline{k.f}$

Ejercicio 8. Sean V un K-espacio vectorial, $k \in K$ y $v \in V$. Probar las siguientes afirmaciones:

i) $k.\vec{0} = \vec{0}$

ii) $-(-v) = v$

iii) $k.v = \vec{0} \Rightarrow k = 0$ ó $v = \vec{0}$

iv) $-\vec{0} = \vec{0}$

Ejercicio 9.

i) Dado $v \in \mathbb{R}^2$, se define una función $f_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la siguiente forma:

$$f_v(x, y) = (x, y) + v.$$

Interpretar geométricamente el efecto de f_v sobre el plano (f_v se llama la *traslación en* v).

ii) Probar que $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma $+_{(2,1)}$ y el producto por escalares $\cdot_{(2,1)}$ definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (x, y) +_{(2,1)} (x', y') &= (x + x' - 2, y + y' - 1) \\ r \cdot_{(2,1)} (x, y) &= r.(x - 2, y - 1) + (2, 1) \end{aligned}$$

(Este espacio se notará $\mathbb{R}^2_{(2,1)}$ para distinguirlo de $\mathbb{R}^2$ con la suma y el producto usual. La notación se basa en que el $(2, 1)$ resulta el neutro de la suma $+_{(2,1)}$).

iii) Interpretar geométricamente $+_{(2,1)}$ y $\cdot_{(2,1)}$, teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} (x, y) +_{(2,1)} (x', y') &= f_{(2,1)}(f_{(-2,-1)}(x, y) + f_{(-2,-1)}(x', y')) \\ r \cdot_{(2,1)} (x, y) &= f_{(2,1)}(r.f_{(-2,-1)}(x, y)) \end{aligned}$$

Ejercicio 10.

i) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la suma y para la resta pero no para la multiplicación por escalares de $\mathbb{R}$.

ii) Encontrar un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la multiplicación por escalares de $\mathbb{R}$, pero no para la suma.

Ejercicio 11. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de V como K-espacio vectorial:

i) $S_1 = \{a \cdot i \, : \, a \in \mathbb{R}\}, \quad V = \mathbb{C}, \quad K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$

ii) $S_2 = \{f \in K[X] \, : \, f'(1) = 0\} \quad V = K[X]$

iii) $S_3 = \{M \in K^{n\times n} \, : \, M^t = -M\}, \quad V = K^{n\times n}$

iv) $S_4 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \, : \, f'' + 3f' = 0\}, \quad V = C^\infty(\mathbb{R}), \quad K = \mathbb{R}$

v) $S_5 = \{v \in \mathbb{R}^2_{(2,1)} \, : \, x + y = 3\}, \quad V = \mathbb{R}^2_{(2,1)}, \quad K = \mathbb{R}$

vi) $S_6 = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \, : \, \exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $a_r = 0 \;\forall\, r \geq k\}, \quad V = K^{\mathbb{N}}$

Ejercicio 12. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V si y solo si $S \subseteq T$ ó $T \subseteq S$.

Ejercicio 13. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes K-espacios vectoriales:

i) $\mathbb{C}^n, \;\; K = \mathbb{R}$

ii) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x + y - z = 0 \;,\; x - y = 0\}\,, \;\; K = \mathbb{R}$

iii) $S_2 = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 : \, x + 2y + z = 0\}, \;\; K = \mathbb{Z}_7$

iv) $S_3 = \{A \in \mathbb{Q}^{3\times 3} : \, A = -A^t\}\,, \;\; K = \mathbb{Q}$

v) $S_4 = \{f \in \mathbb{R}_4[X] : \, f(1) = 0$ y $f(2) = f(3)\}\,, \;\; K = \mathbb{R}$

vi) $S_5 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \, a_i = 0 \;\forall\, i \geq 5\,,\, a_1 + 2a_2 - a_3 = 0\,,\, a_2 + a_4 = 0\}\,, \;\; K = \mathbb{R}$

vii) $S_6 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \, f''' = 0\}\,, \;\; K = \mathbb{R}$

Ejercicio 14. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

i) Sea V un K-espacio vectorial y sean $v,\, w \in V,\, k \in K$. Entonces $< v \,,\, w > = < v \,,\, w + k.v >$.

ii) Sean $v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4,\, w \in \mathbb{R}^7$ tales que $< v_1,\, v_2,\, w > = < v_3,\, v_4,\, w >$. Entonces $< v_1 \,,\, v_2 > = < v_3 \,,\, v_4 >$.

Ejercicio 15. Sea $S = < (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) > \,\subseteq \mathbb{R}^4$.

i) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.

ii) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

iii) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

Ejercicio 16. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ como subespacio de V en cada uno de los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3, \quad S = < (1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24) >, \qquad T = < (1, 1, 0), (3, 2, 1) >$

ii) $V = \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad S = \{(x_{ij}) \,/\, x_{ij} = x_{ji}$ para $1 \leq i, j \leq 3\}, \qquad T = \{(x_{ij}) \,/\, x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$

iii) $V = \mathbb{R}[X], \quad S = \{f \in \mathbb{R}[X] : \, f(1) = 0\}, \qquad T = < 1 \,,\, X,\, X^2,\, X^3 + 2X^2 - X,\, X^5 >$

Ejercicio 17. Decidir si los siguientes vectores son linealmente independientes sobre K.

i) $(1-X)^3,\ (1-X)^2,\ 1-X,\ 1$ en $K[X]$

ii) $(1-i, i)\,,\ (2,-1+i)$ en $\mathbb{C}^2$, para $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$

iii) $f(x)=e^x\,,\ g(x)=x$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Ejercicio 18. Hallar, para cada $k\in\mathbb{R}$, la dimensión de los siguientes subespacios:

i) $<(k,1,0)\,,\,(3,-1,2)\,,\,(k,2,-2)>\subset\mathbb{R}^3$

ii) $<kX^2+X\,,\,X^2-k\,,\,k^2X>\subset\mathbb{R}[X]$

iii) $\left\langle \begin{pmatrix}1 & k\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}k & 1\\ 0 & 2k\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\rangle\subset\mathbb{R}^{2\times 2}$

iv) $\{x\in\mathbb{R}^3 : A\,x=0\}$, siendo $A=\begin{pmatrix}3 & k-6 & 5k\\ 1 & k-2 & k^2+4k\\ 1 & -2 & k\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$

Ejercicio 19. Sean $v_1,\dots,v_n\in\mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1,\dots,v_n\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$ si y solo si $\{v_1,\dots,v_n\}$ es linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 20. Completar los siguientes conjuntos linealmente independientes a una base del K-espacio vectorial V indicado.

i) $\{(1,1,1,1)\,,\,(0,2,1,1)\}$, $V=\mathbb{R}^4$, $K=\mathbb{R}$

ii) $\{X^3-2X+1\,,\,X^3+3X\}$, $V=\mathbb{R}_3[X]$, $K=\mathbb{R}$

iii) $\left\{ \begin{pmatrix}1 & 1\\ i & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & i\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$, $V=\mathbb{C}^{2\times 2}$, $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$

Ejercicio 21. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores y hallar la dimensión de S.

i) $S=<(1,1,2)\,,\,(1,3,5)\,,\,(1,1,4)\,,\,(5,1,1)>\ \subseteq\mathbb{R}^3$, $K=\mathbb{R}$

ii) $S=<X^2+2X+1\,,\,X^2+3X+1\,,\,X+2>\ \subseteq\mathbb{R}[X]$, $K=\mathbb{R}$

iii) $S=\left\langle \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & i\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\rangle\subseteq\mathbb{C}^{2\times 2}$, $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$

Ejercicio 22. Hallar una base y la dimensión de los siguientes K-espacios vectoriales:

i) $\mathbb{C}$, $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$

ii) $\{f\in\mathbb{Q}[X] :\ f=0$ ó $\mathrm{gr}(f)\le 3$ y $(x^2-2)\mid f\}$, $K=\mathbb{Q}$

iii) $\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in K^{\mathbb{N}} :\ a_i=a_j\ \forall\, i,j\,\}$

Ejercicio 23. Sean S y T los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$S = <(1,2,1,0),(2,1,0,1)>, \quad T = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Hallar un subespacio U de $\mathbb{R}^4$ tal que $\dim U = 2$ y $S \cap T \subset U \subset T$.

Ejercicio 24. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

i) $<(-2,1,6),\,(3,0,-8)> \,=\, <(1,\,k,\,2k),\,(-1,-1,\,k^2-2),\,(1,1,k)>$.

ii) $S \cap T = <(0,1,1)>$, siendo $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = <(1,k,2),(-1,2,k)>$.

Ejercicio 25. En cada uno de los siguientes casos caracterizar $S + T \subseteq V$ y determinar si la suma es directa.

i) $V = \mathbb{R}^3,\ S = <(1,1,1)>,\ T = <(2,-1,1),(3,0,2)>$

ii) $V = \mathbb{R}[X],\ S = \{f \in \mathbb{R}[X] : f = 0 \text{ ó } \mathrm{gr}(f) \leq 3\},\ T = \{f \in \mathbb{R}[X] : \mathrm{mult}(4,f) \geq 4\}$

iii) $V = \mathbb{R}^{2\times 3},\ S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 3} : A_{11} + A_{21} = 0,\ 3A_{22} - 2A_{11} = A_{13} + A_{23}\}$,
$T = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ejercicio 26. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i) Si S, T son subespacios de $\mathbb{R}^3$ con $\dim S = \dim T = 2$, entonces existe $v \neq 0$ tal que $v \in S \cap T$.

ii) Si S, T, W son subespacios de $\mathbb{R}^{11}$ tales que $\dim S = \dim T = \dim W = 4$, entonces $\dim(S \cap T \cap W) \geq 1$.

Ejercicio 27. Sea V un K-espacio vectorial y sean S, T y U subespacios de V.

i) Probar que $(S \cap T) + (S \cap U) \subseteq S \cap (T + U)$.

ii) Mostrar que, en general, la inclusión anterior es estricta.

iii) Probar que, si $U \subseteq S$, entonces vale la igualdad en i).

Ejercicio 28. Sean S, T y U subespacios de un K-espacio vectorial V tales que $S \cap T = S \cap U$, $S + T = S + U$ y $T \subseteq U$. Probar que $T = U$.

Ejercicio 29. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $S \subseteq V$ un subespacio.

i) Probar que existe un subespacio $T \subseteq V$ tal que $S \oplus T = V$ (en este caso T se dice un *complemento* de S con respecto a V).

ii) Hallar un complemento para las matrices de traza nula en $k^{n\times n}$.

Ejercicio 30. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea T un hiperplano de V (es decir, un subespacio de dimensión $n-1$).

i) Probar que si $v \notin T$, entonces $T \oplus <v> = V$.

ii) Si S es un subespacio de V tal que $S \not\subseteq T$, probar que $S + T = V$. Calcular $\dim(S \cap T)$.

iii) Si S y T son dos hiperplanos distintos, deducir $\dim(S \cap T)$.

Ejercicio 31. Sea V un $\mathbb{Z}_p$.espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$.

i) Calcular el cardinal de V.

ii) Sea K un cuerpo finito. Probar que existe $p \in \mathbb{N}$ primo tal que K es un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial. Deducir que el cardinal de K es una potencia de p.

iii) Calcular la cantidad de subespacios de dimensión 1 y $n-1$ que hay en V.

Ejercicio 32. Sean K un cuerpo infinito y V un K-espacio vectorial. Probar que V no es unión de finitos subespacios propios.
