TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES
ÁLGEBRA LINEAL

GABRIEL SZWARCBERG

Comencemos entrando en calor con este ejercicio para empezar a fluir entre matrices y transformaciones lineales.

Ejercicio 1. *Si $A, B \in K^{n\times n}$ cumplen que $K^n = \ker(A) + E_c(B)$, entonces $E_c(A) = E_c(AB)$.*

Resolución. Demostremos más en general que si un K-espacio vectorial V de dimensión finita y $f, g \in \hom_K(V, V)$ son tales que $V = \ker(f) + \operatorname{im}(g)$, entonces $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f \circ g)$.

Probemos la doble contención. Sea $v \in \operatorname{im}(f \circ g)$, existe $w \in V$ tal que $v = (f \circ g)(w) = f(g(w))$ y $g(w) \in V$ por lo que $v \in \operatorname{im}(f)$.

Tomemos ahora $v \in \operatorname{im}(f)$, existe $w \in V$ tal que $v = f(w)$, además, $w \in V = \ker(f) + \operatorname{im}(g)$, de modo que existen $w_1 \in \ker(f)$ y $w_2 \in V$ tales que $w = w_1 + g(w_2)$, o sea que $v = f(w) = f(w_1 + g(w_2)) = f(w_1) + f(g(w_2)) = 0 + f(g(w_2)) = (f \circ g)(w_2)$, por lo tanto $v \in \operatorname{im}(f \circ g)$.

El resultado se sigue de considerar las transformaciones lineales $\mu_A : K^n \to K^n$ dada por $\mu_A(v) = Av$ y μ_B análogamente definida, por definición $\ker(\mu_A) = \ker(A)$, $\operatorname{im}(\mu_B) = E_c(B)$ e $\operatorname{im}(\mu_A \circ \mu_B) = E_c(AB)$, entonces que $A, B \in K^{n\times n}$ cumplan que $K^n = \ker(A) + E_c(B)$ es equivalente a que $K^n = \ker(\mu_A) + \operatorname{im}(\mu_B)$, por lo demostrado más generalmente entonces $\operatorname{im}(\mu_A) = \operatorname{im}(\mu_A \circ \mu_B) = \operatorname{im}(\mu_(AB))$ y esto último equivale a $E_c(A) = E_c(AB)$. □

Repasemos los resultados importantes de las matrices asociadas a una transformación lineal.

Proposición 1. *Sean V y W dos K-espacios vectoriales de dimensión finita, y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Si B_1 y B_2 son bases de V y W respectivamente, entonces para cada $x \in V$,*

$$[f]_{B_1B_2} \cdot (x)_{B_1} = (f(x))_{B_2}.$$

Proposición 2. *Sean V,W y U tres K-espacios vectoriales de dimensión finita. Sean B_1,B_2 y B_3 bases de V,W y U respectivamente. Sean $f : V \to W$ y $g_W \to U$ transformaciones lineales. Entonces*

$$[g \circ f]_{B_1B_3} = [g]_{B_2B_3} \cdot [f]_{B_1B_2}.$$

Proposición 3. *Sean V y W dos K-espacios vectoriales de dimensión finita, y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Si B_1, B_1' y B_2, B_2' son bases de V y W respectivamente, entonces*

$$[f]_{B_1'B_2'} = C_{B_2B_2'} \cdot [f]_{B_1B_2} \cdot C_{B_1'B_1}.$$

Ahora sí, hagamos ejemplos de transformaciones lineales representadas matricialmente.

Ejercicio 2. *Sea* $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *con* $a,b,c,d\in\mathbb{R}$*, mostrar que* $f:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ *definida como* $f(X)=AX+XA$ *es una transformación lineal y hallar* $[f]_E$ *donde* E *es la base canónica de* $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Resolución. Ver que es una transformación lineal queda para repaso. Encontremos $[f]_E$, para esto hagamos la cuenta en detalle. Recordemos que

$$E=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}=\{E^{11},E^{12},E^{21},E^{22}\}$$

viendo esta igualdad de conjuntos en orden.

Debemos calcular $f(E^{ij})$ y ver sus coordenadas en la base E. Empecemos

$$f(E^{11})=AE^{11}+E^{11}A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}=2aE^{11}+bE^{12}+cE^{21}$$

de modo que $[f(E^{11})]_E=(2a,b,c,0)$,

$$f(E^{12})=AE^{12}+E^{12}A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} c & a+d \\ 0 & c \end{pmatrix}=cE^{11}+(a+d)E^{12}+cE^{22}$$

de modo que $[f(E^{12})]_E=(c,a+d,0,c)$,

$$f(E^{21})=AE^{21}+E^{21}A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ d+a & b \end{pmatrix}=bE^{11}+(d+a)E^{21}+bE^{22}$$

de modo que $[f(E^{21})]_E=(b,0,d+a,b)$,

$$f(E^{22})=AE^{11}+E^{11}A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 2d \end{pmatrix}=bE^{12}+cE^{21}+2dE^{22}$$

de modo que $[f(E^{22})]_E=(0,b,c,2d)$.

Por lo tanto, nos queda que

$$[f]_E=\begin{pmatrix} 2a & c & b & 0 \\ b & a+d & 0 & b \\ c & 0 & a+d & c \\ 0 & c & b & 2d \end{pmatrix}$$

□

Ejercicio 3. *Sean* $A,B\in K^{n\times n}$ *tales que* $AB=0$*. Sea* $r=\mathrm{rg}(B)$*, probar que existen matrices* $C\in GL(n,K)$*,* $B_1\in K^{r\times r}$*,* $A_2\in K^{(n-r)\times(n-r)}$ *y* $A_1,B_2\in K^{r\times(n-r)}$ *tales que*

$$CAC^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

y

$$CBC^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolución. Recordemos que $\mu_A : K^n \to K^n$ dada por $\mu_A(v) = Av$ es una transformación lineal tal que $[\mu_A]_\varepsilon = A$, donde ε es la base canónica de K^n. Recordemos que $r = \mathrm{rg}(B)$ es la dimensión de $E_c(B)$, equivalentemente es la dimensión de $\mathrm{im}(\mu_B)$, tomemos entonces $\{v_1, \dots, v_r\}$ una base de $\mathrm{im}(\mu_B)$ y completemos a una base $\beta = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ de K^n.

Veamos como es $[\mu_B]_\beta$, sucede que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ es $\mu_B(v_i) \in \mathrm{im}(\mu_B)$, simplemente por definición, pero la base de $\mathrm{im}(\mu_B)$ es $\{v_1, \dots, v_r\}$, entonces para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ tenemos que $[\mu_B(v_i)]_\beta = (b_1^i, \dots, b_r^i, 0, \dots, 0)$, así que podemos escribir

$$[\mu_B]_\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } B_1 \in K^{r\times r} \text{ y } B_2 \in K^{r\times(n-r)}.$$

Ahora veamos $[\mu_A]_\beta$, por la hipótesis de que $AB = 0$, que es equivalente a que $\mu_A \circ \mu_B = 0$, se tiene que $\mu_A(v_i) = 0$ para $i \in \{1, \dots, r\}$ ya que para $i \in \{1, \dots, r\}$ podemos escribir $v_i = \mu_B(w_i)$, de aquí es claro que

$$[\mu_A]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ con } A_2 \in K^{(n-r)\times(n-r)} \text{ y } A_1 \in K^{r\times(n-r)}$$

Para terminar, recordemos que $A = [\mu_A]_\varepsilon$ y $B = [\mu_B]_\varepsilon$ y como $[\mu_A]_\beta = C_{\varepsilon\beta}[\mu_A]_\varepsilon C_{\beta\varepsilon} = C_{\beta\varepsilon}^{-1}[\mu_A]_\varepsilon C_{\beta\varepsilon}$, similarmente para $[\mu_B]$, tomando $C = C_{\varepsilon\beta} \in GL(n,K)$ se sigue el resultado del enunciado.

$\square$