0.1. Espacio Dual-Leonardo Lanciano- 15/9.

Arrancamos la clase con un repaso. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Llamamos a su espacio dual V^* como:

$$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K}) = \{ f : V \to \mathbb{K} \mid f \text{ es } \mathbb{K}-\text{lineal} \}.$$

Luego observar que tenemos el siguiente teorema de la teórica.

Teorema 0.1.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n. Entonces se tiene que* $\dim(V^*) = n$. *Más aún, si $\mathcal{B} = \{ v_1, \dots, v_n \}$ es una base de V y para cada i definimos $\varphi_i : V \to \mathbb{K}$ como la única transformación lineal que cumple que en una base está dada por:*

$$\varphi_i(v_i) = 1, \varphi_i(v_j) = 0 \text{ si } j \neq i.$$

Entonces $\mathcal{B}^* = \{ \varphi_1, \dots, \varphi_n \}$ es base de V^* y se llama la base dual a $\mathcal{B}$.

Entonces tenemos la siguiente proposición:

Proposición 0.1.2. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n. Consideremos $\mathcal{B} = \{ v_1, \dots, v_n \}$ y $\mathcal{B}' = \{ w_1, \dots, w_n \}$ bases de V junto con $\mathcal{B}^* = \{ \varphi_1, \dots, \varphi_n \}$ y $(\mathcal{B}')^* = \{ \psi_1, \dots, \psi_n \}$ sus respectivas bases duales. Entonces para todo $x \in V$ y $f \in V^*$ vale que:*

1. $[x]_{\mathcal{B}} = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$.
2. $[f]_{(\mathcal{B}')^*} = (f(w_1), \dots, f(w_n))$.
3. $C_{\mathcal{B}^*(\mathcal{B}')^*} = (C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^T$.

Demostración. Pasamos a la demostración. Demostramos parte por parte.

1. Notemos que como $\mathcal{B}$ es base, tenemos que existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$. Luego, aplicando φ_i vemos que:

   $$\varphi_i(x) = \alpha_i.$$

   Puesto que $\{ \varphi_1, \dots, \varphi_n \}$ son la base dual de $\mathcal{B}$. Pero por otra parte $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ eran las coordenadas de X en base $\mathcal{B}$. En consecuencia tenemos que:

   $$[x]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x))$$

2. Aplicando un razonamiento análogo, al anterior, sabemos que existen $\mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tal que $f = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \psi_j$. Luego, evaluando en el respectivo w_j tenemos que:

   $$f(w_j) = \mu_j.$$

   Puesto que $\psi_i(v_j) = \delta_{ij}$. Pero por otra parte $\mu_1, \cdots, \mu_n$ eran las coordenadas de f en la base $(\mathcal{B}')^*$. De esta forma, se tiene que:

   $$[f]_{\mathcal{B}^*} = (\mu_1, \cdots, \mu_n) = (f(v_1), \cdots, f(v_n)).$$

3. Este item se seguirá de las partes 1 y 2. Notemos que para cada $1 \leq i \leq n$ tenemos por la parte 1 que:

   $$[w_i]_{\mathcal{B}} = (\varphi_1(w_i), \cdots, \varphi_n(w_i)).$$

   Luego tenemos que:

   $$C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \big([w_1]_{\mathcal{B}} \mid \dots \mid [w_n]_{\mathcal{B}}\big) = \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) & \dots & \varphi_1(w_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(w_1) & \dots & \varphi_n(w_n) \end{pmatrix}.$$

   Por otra parte, para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene por la parte 2 que:

   $$[\varphi_i]_{(\mathcal{B}')^*} = (\varphi_i(w_1), \cdots, \varphi_i(w_n)).$$

Luego, tenemos que.

$$C_{\mathcal{B}^*(\mathcal{B}')^*} = \left([\varphi_1]_{(\mathcal{B}')^*} \mid \ldots \mid [\varphi_n]_{(\mathcal{B}')^*}\right) = \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) & \ldots & \varphi_n(w_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(w_n) & \ldots & \varphi_n(w_n) \end{pmatrix}$$

Comparando las matrices tenemos que:

$$C_{\mathcal{B}^*(\mathcal{B}')^*} = C^T_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.$$

□

El resultado anterior es muy util porque nos permite calcular la base dual de casi cualquier cosa.

Pasamos al primer ejercicio de la clase.

Ejercicio 0.1.3. *Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}_n[x]$ dada por $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$, calcular $\mathcal{B}^*$.*

Demostración. Observar que por definición la base dual son funciones $l_1, \ldots, l_{n+1}$ tal que:

$$l_i(x^j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Luego, dado $f \in \mathbb{R}_n[x]$ tenemos que $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Así, tenemos que:

$$l_j(f) = \alpha_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}.$$

Es decir que l_j es la aplicación derivar j veces y evaluar en 0 dividiendo por $j!$. Es decir que:

$$l_j(f) = \frac{1}{j!} \cdot \frac{d^j f}{dx^j}(0).$$

□

Usamos lo anterior para hacer un cómputo explícito en un ejercicio.

Ejercicio 0.1.4. *Sea $\mathcal{B} = \{x - 1, (x-1)^2, \frac{1}{4}\}$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Calcular $\mathcal{B}^*$.*

Demostración. Luego, en general la idea detrás de estos ejercicios es hacer cuentas con la canónica. Entonces lo que haremos será calcular la respectiva matríz de cambio de base.

Sea $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$. A nosotros nos interesaría calcular la matríz $C_{\mathcal{B}^*\mathcal{E}^*}$ puesto que esta en sus columnas tiene las coordenadas de los vectores que estamos buscando. En consecuencia por lo visto en la proposición anterior, tenemos que:

$$C_{\mathcal{B}^*\mathcal{E}^*} = C^T_{\mathcal{E}\mathcal{B}}.$$

Luego, lo que haremos será calcular $C_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ y luego trasponerla. De esta forma, tenemos que:

$$C_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

En consecuencia tenemos que:

$$C_{\mathcal{B}^*\mathcal{E}^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

En consecuencia si $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_3\}$ tenemos que:

- $\varphi_1(f) = f'(0) + f''(0)$.

- $\varphi_2(f) = \dfrac{f''(0)}{2}$.
- $\varphi_3(f) = 4f(0) + 4f'(0) + 2f''(0)$.

□

Ahora vamos a tratar de probar un resultado mejor.

Ejercicio 0.1.5. *Sea $\mathbb{C}_k[x_1, \cdots, x_n]$ el $\mathbb{C}$ espacio vectorial formado por los polinomios en n variables en el que cada variable puede tener grado a lo sumo k.*

a) ¿Quién es una base de $\mathbb{C}_k[x_1, \cdots, x_n]$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial? ¿Cuál es su dimensión?

b) Para cada $v \in \{0, \ldots, k\}^n$ definimos $e_v : \mathbb{C}_k[x_1, \cdots, x_n] \to \mathbb{C}$ como $e_v(f) = f(v)$. Demostrar que $\mathcal{B}^* = \{e_v \mid v \in \{0, \ldots, k\}^n\}$ es una base de $\mathbb{C}_k[x_1, \ldots, x_n]^*$.

Demostración.

a) Observemos que una base de $\mathbb{C}_k[x_1, \ldots, x_n]$ es $\mathcal{E} = \left\{ \prod_{j=1}^{n} x_j^{r_j} \;\middle|\; r_j \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r_j \leq k\ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \right\}$.
En consecuencia tenemos que $\dim(\mathbb{C}_k[x_1, \ldots, x_n]) = (k+1)^n$.

b) Observemos que $\#(\mathcal{B}^*) = (k+1)^n$. En consecuencia para ver que es una base basta con demostrar que es linealmente independiente. Luego, consideramos una combinación lineal que de cero.

$$\sum_{v \in \{0,\ldots,k\}^n} \alpha_v e_v = 0 \Rightarrow \sum_{v \in \{0,\ldots,k\}^n} \alpha_v e_v(f) = 0\ \forall f \in \mathbb{C}_k[x_1, \ldots, x_n] \tag{1}$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in \{0,\ldots,k\}^n} \alpha_v f(v) = 0\ \forall f \in \mathbb{C}_k[x_1, \ldots, x_n]. \tag{2}$$

Luego, el problema se resume en evaluar en funciones f convenientes para despejar.
Para cada $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \{0, \ldots, k\}^n$ consideremos:

$$\varphi_v = \varphi_{(v_1,\ldots,v_r)} = \prod_{j=1}^{n} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq v_j}}^{k} (x_j - i) \right).$$

Observar que si $w \neq v \in \{0, \ldots, k\}^n$ entonces $\varphi_v(w) = 0$ y más aún, $\varphi_v(v) \neq 0$ por construcción. Evaluando la ecuación (2) en φ_v se obtiene que $\alpha_v = 0$ para todo $v \in \{0, \ldots, k\}^n$ y en consecuencia este conjunto es linealmente independiente.

□

La siguiente proposición es un resultado muy útil, no solo para la materia sino que para la vida como matemáticos en general.

Proposición 0.1.6. *Sea $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ tal que $f \neq 0$. Entonces existen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ tal que $f(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$.*

Demostración. Sea $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ tal que $f \neq 0$. Notemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f \in \mathbb{C}_k[x_1, \ldots, x_n]$. Luego, sabemos que $\mathcal{B}^* = \{e_v \mid v \in \{0, \ldots, k\}^n\}$ es una base de $\mathbb{C}_k[x_1, \ldots, x_n]^*$ como $\mathbb{C}$ espacio vectorial. En particular sabemos que es la base dual de alguna base $\mathcal{B}$. Luego, por la proposición tenemos que:

$$[f]_{\mathcal{B}} = (e_{v_1}(f), \ldots, e_{v_{(k+1)^n}}(f)).$$

En particular como $f \neq 0$ hay alguna coordenada no nula y ahí finaliza la demostración. □

Ahora usemos esta proposición para resolver un ejercicio.

Ejercicio 0.1.7. *Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sean $v_1, \cdots, v_n \in V$ no nulos. Demostrar que existe $f \in V^*$ tal que $f(v_i) \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Observemos que vía eventualmente tomar coordenadas, basta con demostrar el resultado para cuando $V = \mathbb{C}^k$. Luego sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^k$. Anotemos a cada $v_i = (v_1^i, \ldots, v_k^i)$. Observar que toda $\varphi \in V^*$ tiene la forma:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i.$$

Luego buscamos $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i^j \neq 0 \ \forall \ 1 \leq j \leq n.$$

De esta forma, definimos $P \in \mathbb{C}[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]$ como:

$$P(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i^j \right).$$

Es claro que P no es el polinomio nulo, y luego, por la proposición anterior, sabemos que existen $c_1, \ldots, c_k$ tal que $P(c_1, \ldots, c_k) \neq 0$. En particular como es un producto, cada término es no nulo y en consecuencia la función $\psi : V \to \mathbb{C}$ dada por:

$$\psi(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i, \text{ cumple con lo pedido.}$$

□

Ejercicio 0.1.8. *Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y sean $f, g \in V^*$ tales que $f \cdot g \in V^*$. Demostrar que $f = 0$ o $g = 0$.*

Demostración. Supongamos que tanto f como g son distintas de cero. Luego existen $v_1, v_2 \in V$ tal que $f(v_1) \neq 0$ y $g(v_2) \neq 0$. Luego consideramos el polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ dado por:

$$P(x, y) = (xf(v_1) + yf(v_2))(xg(v_1) + yg(v_2)) = (f(xv_1 + yv_2)(g(xv_1 + yv_2).$$

Notar que por la proposición nuevamente, existen $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tal que $P(c_1, c_2) \neq 0$. En consecuencia existe w tal que $f(w) \neq 0$ y $g(w) \neq 0$. Ahora bien, tenemos que:

$$2f \cdot g(w) = f \cdot g(w + w) = f(w + w) \cdot g(w + w) = (f(2w))(g(2w)) = 4f(w) \cdot g(w).$$

Dividiendo por 2 y restando tenemos que:

$$f \cdot g(w) = 0 \text{ lo cual es una contradicción que vino de suponer que ambas eran no nulas.}$$

□

Pasamos con un último ejercicio, para esto hacemos un recuerdo.

Recuerdo 0.1.9. *Dados V, W dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales y $f : V \to W$ transformación lineal. Definimos $f^t : W^* \to V^*$ como $f^T(\varphi) = \varphi \circ f$.*

Ejercicio 0.1.10. *Sean V, W, T espacios vectoriales y $f : V \to W$, $g : W \to V$ transformaciones lineales. Diremos que la sucesión:*

$$0 \to V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} T \to 0,$$

es exacta si f es monomorfismo, g es epimorfismo y se cumple además que $\operatorname{Im}(f) = \ker(g)$. Demostrar que si se tiene una sucesión exacta entonces la sucesión traspuesta:

$$0 \to T^* \xrightarrow{g^T} W^* \xrightarrow{f^T} V^* \to 0 \textit{ es exacta.}$$

Demostración. Debemos ver tres cosas. que g^T es es monomorfismo, que f^T es epimorfismo y que $\operatorname{Im}(g^T) = \ker(f^T)$.

1. Primero veamos que g^T es monomorfismo. Para esto vemos que $\ker(g^T) = 0$. Luego sea $\varphi \in T^*$ tal que $g^T(\varphi) = 0$. Así, por la definición de la transpuesta tenemos que $\varphi \circ g = 0$. Ahora bien, si $\varphi \in T^*$ es no nula, existe $t \in T$ tal que $\varphi(t) \neq 0$. Sin embargo, como g es epi, existe $w \in W$ tal que $g(w) = t$. De esta manera tenemos que:

$$0 = g^T(\varphi)(w) = \varphi(g(w)) = \varphi(t) \neq 0.$$

Dandonos una contradicción que vino de suponer que φ era no nula. De esta manera $\ker(g^T) = 0$.

2. Veamos que f^T es epimorfismo. Para esto, sea $\varphi \in V^*$. Queremos ver que existe $\psi \in W^*$ tal que $f^T(\psi) = \varphi$. Sin embargo, esto es equivalente a querer que pase:

$$\psi \circ f = \varphi \Leftrightarrow \psi(f(v)) = \varphi(v) \ \forall \ v \in V.$$

Ahora bien, como f es monomorfismo, sabemos que f es inyectiva y luego admite una inversa cuando miramos en su imagen. Es decir existe una transformacion lineal $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to V$ tal que $f^{-1} \circ f = Id_{\mathrm{Im}(f)}$. Luego consideramos $\hat{\psi} : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{K}$ como:

$$\hat{\psi}(w) = \varphi(f^{-1}(w)).$$

De esta manera, podemos extender a W a $\hat{\psi}$ y llamamos ψ a esta extensión. Observemos que:

$$f^T(\psi) = \psi \circ f \Rightarrow \psi \circ f(v) = \hat{\psi}(f(v)) = \varphi f^{-1}(f(v)) = \varphi(v).$$

Y en consecuencia se tiene lo deseado.

3. Para ver que $\mathrm{Im}(g^T) = \ker(f^T)$ utilizamos la doble inclusión.

   - $\subseteq$) Sea $\varphi \in \mathrm{Im}(g^T)$. Luego existe $\psi \in T^*$ tal que $\varphi = g^T(\psi)$. Queremos ver que $f^T(\varphi) = 0$. Luego, tenemos que:

     $$f^T(\varphi) = \varphi \circ f = g^T(\psi) \circ f = \psi \circ g \circ f = 0 \text{ ya que } \ker(g) = \mathrm{Im}(f).$$

   - $\supseteq$) Sea $\varphi \in \ker(f^T)$. Luego sabemos que $f^T(\varphi) = 0$, es decir que $\varphi \circ f = 0$. Queremos ver que existe $\psi \in T^*$ tal que $\varphi = g^T(\psi)$ es decir tal que $\varphi = \psi \circ g$.
     Observar que $W = \ker(g) \oplus S$ con S un subespacio de W. En particular, notar que $g|_S$ resulta biyectiva y lineal. Luego, esta admite una inversa lineal a derecha $g^{-1} : T \to S$. Así, consideremos ψ como:

     $$\psi = \varphi \circ g^{-1}.$$

     Observar que $\psi \in T^*$. Veamos que $g^T(\psi) = \varphi$. Luego, tenemos que:

     $$g^T(\psi) = \psi \circ g = \varphi \circ g^{-1} \circ g.$$

     Veamos ahora que $\varphi \circ g^{-1} \circ g = \varphi$. Para esto sea $w \in W$. Luego, $w = h + s$ con $h \in \ker(g)$ y $s \in S$.

     $$\varphi(g^{-1}(g(w))) = \varphi(g^{-1}(g(h))) + \varphi(g^{-1}(g(s))) = 0 + \varphi(s) = \varphi(s) + \varphi(h) = \varphi(w).$$

     Donde en el ante ultimo paso, utilizamos que $h \in \ker(g) = \mathrm{im}(f)$. Así, se sigue el resultado.

$\square$