## 1.1. Bases, Dimensión y Matrices- Álgebra Lineal 25/8/23 - Leonardo Lanciano

La idea de la clase de hoy es hacer ejercicios dentro del $\mathbb{K}$ espacio vectorial $M_n(\mathbb{K})$ y calcular dimensiones / bases de subespacios.

Primero comenzamos recordando un poco de notación.

**Recuerdo 1.1.1.** *Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo, $n \in \mathbb{N}$ y $V$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial.*

1. *Notamos con $M_n(\mathbb{K})$ como el $\mathbb{K}$ espacio vectorial de matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$. Según el autor esta notación puede variar y a veces se las nota como $\mathbb{K}^{n\times n}$.*
2. *Una base de $V$ como $\mathbb{K}$-espacio vectorial es un conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$ tal que para cada $v \in V$ se tiene que existen únicos $r \in \mathbb{N}$, $v_{i_1}, \cdots, v_{i_r} \in \mathcal{B}$ y $a_{i_1}, \cdots, a_{i_r} \in \mathbb{K}$ tales que:*
$$v = \sum_{j=1}^{r} a_{i_j} v_{i_j}.$$
3. *Diremos que $V$ tiene dimensión finita si $V$ admite una base finita $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$. En caso contrario, diremos que $V$ tiene dimensión infinita.*

Luego recordemos el siguiente teorema que seguro se los comentaron en la teórica o se los comentaran.

**Teorema 1.1.2.** *Sea $V$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Existe $\mathcal{B} \subseteq V$ tal que $\mathcal{B}$ es una base de $V$ como $\mathbb{K}$ espacio vectorial.*
2. *Si $V$ tiene dimensión finita entonces todas las bases tienen el mismo cardinal.*

La parte 2 del teorema anterior nos permite definir lo siguiente:

**Definición 1.1.3.** Sea $V$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\mathcal{B}$ una base de $V$. Entonces definimos la dimensión de $V$ notada como $\dim(V)$ como:
$$\dim(V) = \#\mathcal{B}.$$

En general es muy dificil encontrar bases para espacios de dimensión infinita de manera explicita. El teorema anterior lo enuncie con tanta generalidad porque vamos a ver a lo largo de la materia que muchas veces es útil considerar una base. Ahora que hicimos el repaso de los contenidos teóricos, pasemos a dar un par de ejemplos.

**Ejemplo 1.1.4.** Sea $n \in \mathbb{N}$.

1. Una base para $\mathbb{R}^n$ es la formada por los vectores canónicos, es decir $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.
2. Una base para $\mathbb{K}_n[X]$ es la formada por los monomios, es decir $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$.
3. ¿Cuál es una base para $\mathbb{K}[X]$, ¿Y para $\mathbb{K}[X, Y]$?

Entonces ahora que estamos cómodos con las definiciones, arrancamos con un ejercicio de calentamiento.

**Ejercicio 1.1.5.** *Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el $\mathbb{R}$ espacio vectorial formado por las sucesiones de números reales. Consideramos en $V$ el conjunto $\mathcal{B} = \{e_i\}$, donde $(e_i)_n = \begin{cases} 1 & si\ n = i \\ 0 & si\ no \end{cases}$. Demostrar que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente pero no es una base.*

*Demostración.* Es claro que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente pues si consideramos una combinación lineal finita que de cero tenemos que:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i = \overline{0} \Rightarrow \left( \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i \right)_n = \lambda_n = 0.$$

Sin embargo, notar que la sucesión $a$ definida por $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ no se puede escribir como combinación lineal finita de los $e_i$. □

Entonces ahora vamos con un segundo ejercicio ahora encarando para el lado de las matrices. Primero para esto introducimos una definición.

**Definición 1.1.6.** Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Definimos el núcleo de $A$, notado $\ker(A)$ como:

$$\ker(A) = \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (0, \cdots, 0) \right\}.$$

Ahora si, pasamos al ejercicio.

**Ejercicio 1.1.7.** *Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. Demostrar que:*

*a) Para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\ker(A^k) \subseteq \ker(A^{k+1})$.*

*b) Si existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\ker(A^j) = \ker(A^{j+1})$ entonces $\ker(A^k) = \ker(A^j)$ para todo $k \geq j$.*

*Demostración.* Demostramos inciso por inciso.

a) Para este inciso simplemente consideramos $x = (x_1, \cdots, x_n)$ tal que $x \in \ker(A^k)$. Hay que ver que $A^{k+1}x = \overline{0}$, pero tenemos que:

$$A^{k+1}x = A(A^k x) = A\overline{0}^t = \overline{0}.$$

Por lo que $x \in \ker(A^{k+1})$.

b) Observemos que por el inciso anterior, tenemos que dado $k \geq j$:

$$\ker(A^j) \subseteq \ker(A^{j+1}) \subseteq \ker(A^{j+2}) \subseteq \cdots \subseteq \ker(A^k).$$

Por lo que una de las condiciones se sigue trivialmente.

Ahora bien, para ver la igualdad veremos que $\ker(A^{j+1}) = \ker(A^{j+2})$ y en consecuencia tendremos el resultado puesto que podremos iterar.

Observar que por lo anterior tenemos que:

$$\ker(A^{j+1}) \subseteq \ker(A^{j+2}).$$

En consecuencia resta con ver que se cumple la otra inclusión. Sea $x \in \ker(A^{j+2})$ queremos ver que $x \in \ker(A^{j+1})$. Aplicando la hipótesis, se tiene lo siguiente:

$$\overline{0} = A^{j+2}x = A^{j+1}(Ax) \Rightarrow Ax \in \ker(A^{j+1}) = \ker(A^j) \Rightarrow A^j Ax = 0 \Rightarrow A^{j+1}x = 0.$$

Es decir $x \in \ker(A^{j+1})$ que es lo que se quería probar.

□

Continuando con las potencias de matrices, tenemos el siguiente ejercicio.

**Ejercicio 1.1.8.** *Sean, $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $v \in \mathbb{K}^n$ tal que se cumplen:*

1. $A^n v = (0, \cdots, 0)$.
2. $A^{n-1} v \neq (0, \cdots, 0)$.

*Entonces $\left\{ v, Av, A^2 v, \cdots, A^{n-1} v \right\}$ forma una base de $\mathbb{K}^n$.*

*Demostración.* Comenzamos la demostración con una observación:

**Observación 1.1.9.**

1. $A^k v = A^j v$ para $j, k \leq n$ si y solo si $j = k$.

Ahora bien, como $\dim(\mathbb{K}^n) = n$ basta ver que $\{v, Av, A^2v, \cdots, A^n v\}$ son un conjunto linealmente independiente. Para esto, consideramos una combinación lineal y vemos que todos los elementos son cero. Sean $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i v = 0.$$

Luego si multiplicamos la ecuación a izquierda por la matriz $A^{n-1}$ tenemos que:

$$0 = A^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i v = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^{(n-1-i)} v = \lambda_0 v \Rightarrow \lambda_0 = 0.$$

De esta manera, tenemos la condición:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i A^i v = 0.$$

Notar que la suma va desde uno, replicando el truco pero multiplicando por $A^{n-2}$ llegamos a que $\lambda_1 = 0$. Iterando, se ve que $\lambda_k = 0$ para todo $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. □

El siguiente ejercicio da una buena propiedad sobre el producto de matrices y las bases.

**Ejercicio 1.1.10.** *Demostrar que dada una base $\mathcal{B} = \{A_1, \ldots, A_{n^2}\}$ de $M_n(\mathbb{K})$ entonces existen $i, j \in \{1, \cdots, n^2\}$ tal que $A_i A_j \neq A_j A_i$.*

*Demostración.* Este ejercicio es bastante sencillo. La manera de demostrarlo es considerando dos matrices que no conmuten y probar por el absurdo. Supongamos que para todo $i, j$ tenemos que $A_i A_j = A_j A_i$. Sean $B, C \in M_n(\mathbb{K})$ tales que:

$$BC \neq CB.$$

Luego ahora notemos que como $\mathcal{B}$ es una base entonces se tiene que existen $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n^2}, \mu_1, \cdots, \mu_{n^2} \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A_i = B \text{ y } \sum_{j=1}^{n^2} \mu_j A_j = C.$$

Ahora, notemos que:

$$BC = \left(\sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n^2} \mu_j A_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{n^2} u_j \lambda_i A_i A_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{n^2} u_j \lambda_i A_j A_i\right) = \left(\sum_{j=1}^{n^2} \mu_j A_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i A_i\right) = CB.$$

□

Antes del siguiente ejercicio hacemos una observación.

**Observación 1.1.11.** Sea $V$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I} \subseteq V$. Son equivalentes:

1. $\mathcal{B}$ es linealmente independiente:
2. $\langle v_i \rangle_{i \in I} = \bigoplus_{i \in I} \langle v_i \rangle$.

Con esto estamos listos para resolver el ejercicio.

**Ejercicio 1.1.12.** *Sea $S \subseteq M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices $M_n(\mathbb{R})$ que satisfacen que cada una de sus filas y cada una de sus columnas suman exactamente lo mismo. Demostrar que $S$ es un subespacio y hallar tanto una base como la dimensión de $S$.*

*Demostración.* Primero demostremos que $S$ es un subespacio. Para esto debemos chequear que se cumplen las 3 condiciones:

1. $0 \in S$.
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A \in S$ entonces $\lambda A \in S$.
3. Si $A, B \in \mathbb{A}$ entonces $A + B \in S$.

Luego miremos una por 1.

1. $0 \in S$.
2. Si la suma de cada una de sus filas suma lo mismo que la suma de cada una de sus columnas, entonces al multiplicarse por lambda se preserva esta propiedad.
3. Si la suma de cada una de sus filas suma lo mismo que la suma de cada una de sus columnas entonces sumar dos matrices con esta propiedad mantienen la propiedad puesto que la suma es coordenada a coordenada.

Luego, $S$ es un subespacio. La gracia de este ejercicio es considerar una descomposición apropiada de $S$. Luego sea $A \in S$ entonces si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y $\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ tenemos que:

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Si definimos $T = \{ B \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{ Las filas y columnas de } B \text{ suman todas } 0 \}$. Es claro por las mismas razones que $S$ que $T$ es un subespacio y además tenemos que: $A - \lambda Id \in T$. En consecuencia se sigue que:

$$A = (A - \lambda Id) + \lambda Id \in T + \langle Id \rangle \Rightarrow S \subseteq T + \langle Id \rangle.$$

Sin embargo, dos observaciones elementales que se tienen son las siguientes:

1. $T + \langle Id \rangle \subseteq S$.
2. $\langle Id \rangle \cap T = 0$.

En consecuencia de estas dos observaciones se desprende que:

$$S = T \oplus \langle Id \rangle.$$

Por lo que ahora para hallar una base y la dimensión basta con hallar una base de $T$. Para esto primero demos una descripción de $T$ por ecuaciones. Observar que como todas sus filas y todas sus columnas suman cero podemos decir que $T$ esta dado por las siguientes ecuaciones:

$$T = \left\{ A \in M_n(\mathbb{K}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0 \ \forall j \in 1, \cdots, n \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0 \ \forall i \in 1, \cdots, n \end{array} \right\}.$$

Luego, sea $A \in T$. Un truco muy común es agarrar la matriz con coordenadas genéricas y hacer despejes inteligentes de las ecuaciones para recuperar una base.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j} \\ -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i1} & -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i2} & \dots & -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

Lo cual ahora si despejamos el último termino como la suma de su columna, tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{n-1,j} \\ -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i1} & -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i2} & \dots & -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,n-1} & -\sum_{i=1}^{n-1}\left(-\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}\right) \end{pmatrix} = \sum_{r=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} a_{rl} B_{rl}.$$

Donde $B_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$ esta dada por: $(B_{rl})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (r,l) \\ 1 & \text{si } (i,j) = (n,n) \\ -1 & \text{si } (i,j) = (r,n) \\ -1 & \text{si}(i,j) = (n,l) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$. Notando que para cada $l, r$ se tiene que $B_{rl} \in T$ se tiene que:

$$T = \langle B_{11}, \cdots, B_{rl} \cdots, B_{n-1\ n-1} \rangle = \bigoplus_{r=1}^{n-1} \bigoplus_{l=1}^{n-1} \langle B_{rl} \rangle.$$

Donde la última igualdad se sigue de que los $B_{rl}$ cumplen la siguiente propiedad: Para cada $(r,l)$, vale que $B_{rl}$ tiene un 1 en el lugar $(r,l)$ y si $(r',l') \neq (r,l)$ entonces $(B_{r'l'})_{rl} = 0$. Luego, por la observación 1.1.11 tenemos que $\{ B_{r,l} \mid r, l \in 1, \cdots, n-1 \}$ son un conjunto linealmente independiente. Como vimos que generan, estos forman una base de $T$. Pero no hay que olvidarse que hicimos todo esto para obtener una base de $S$, pero eso es sencillo puesto que hay que agregar la identidad. En consecuencia tenemos que una base de $S$ está dada por: $\mathcal{B} = \left( \{ B_{r,l} \mid r, l \in 1, \cdots, n-1 \} \cup Id \right)$ y simplenmente contando elementos, se tiene que:

$$\dim(S) = (n-1)^2 + 1.$$

Lo cual finaliza el ejercicio. $\square$

*Disculpas por la clase larga, Leo.*