Práctica 4: Continuidad, Separabilidad

"Calculus required continuity, and continuity was supposed to require the infinitely little; but nobody could discover what the infinitely little might be."
Bertrand Russel

A. Continuidad

Ejercicio 1. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$. Probar que:

i) f es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ converge a $f(x_0)$.

ii) Son equivalentes:

1. f es continua;
2. para todo $G \subseteq Y$ abierto, $f^{-1}(G)$ es abierto en X;
3. para todo $F \subseteq Y$ cerrado, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

Ejercicio 2. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

i) $f : (\mathbb{R}^2, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ |)$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, donde d representa la métrica euclídea.

ii) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.

iii) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.

iv) $i : (E, d) \longrightarrow (X, d)$, la inclusión, donde $E \subseteq X$.

Ejercicio 3. Sean $f, g, h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \end{cases} \qquad g(x) = x.f(x); \qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ con } (m : n) = 1, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que:

i) f es discontinua en todo punto.

ii) g sólo es continua en $x = 0$.

iii) h es continua en $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.

Ejercicio 4. Probar que un espacio métrico X es discreto si y sólo si toda función de X en un espacio métrico arbitrario es continua.

Ejercicio 5. (Métricas topológicamente equivalentes)

i) Supongamos que existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$d_1(x,y) \leq c_1\ d_2(x,y) \leq c_2\ d_1(x,y)$$

para todo $x, y \in X$. Probar que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

ii) Probar que dos métricas d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes si y sólo si la función identidad $id_X : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$ es homeomorfismo.

iii) Probar que en $\mathbb{R}^n$ todas las métricas d_p con $1 \leq p \leq \infty$ son topológicamente equivalentes.

iv) Consideramos en $\mathbb{R}$ la métrica

$$d'(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$

Probar que es topológicamente equivalente a la métrica usual $d(x,y) = |x-y|$, pero que $\mathbb{R}$ no es completo con la métrica d'.

Ejercicio 6. Considerando en cada $\mathbb{R}^n$ la métrica euclídea, probar que:

i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \operatorname{sen}(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.

ii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado.

iii) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencione otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

Ejercicio 7. Consideramos las funciones $E, I : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$E(f) = f(0) \text{ e } I(f) = \textstyle\int_0^1 f(x)\ dx.$$

i) Demostrar que si utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_∞ ambas resultan continuas.

ii) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_1, I es una función continua pero E no lo es.

iii) Analizar si es posible que una función $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞.

Ejercicio 8. Sean X, Y espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Probar que el gráfico de f, definido por

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\},$$

es cerrado en $X \times Y$ ¿Es cierta la afirmación recíproca?

Ejercicio 9. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

i) Si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, con cada U_i abierto y $f|_{U_i}$ continua para todo $i \in I$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

ii) Si $X = \bigcup_{i \in I} F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para todo $i \in I$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

iii) Si $X = \bigcup_{i=1}^{m} F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para cada $i = 1, \dots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

iv) Si $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$ y $f|_{X_i}$ continua para cada $i = 1, \dots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}$. Probar que f es continua si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos.

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X. Probar que la función $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ es (uniformemente) continua.

Ejercicio 12. *Teorema de Urysohn.* Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B cerrados disjuntos de X.

i) Probar que existe una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que:

$$f|_A \equiv 0, \qquad f|_B \equiv 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall\, x \in X.$$

Sugerencia: Considerar la función $f(x) = \dfrac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$.

ii) Deducir que existen abiertos $U, V \subseteq X$ disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Ejercicio 13. Consideremos en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una función.

i) Probar que f es continua ¿Sigue valiendo si f toma valores irracionales?

ii) Suponiendo que f es biyectiva, ¿puede ser un homeomorfismo?

Ejercicio 14. Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ la aplicación diagonal definida por $\Delta(x) = (x, x)$. Probar que:

i) Δ es un homeomorfismo entre X y $\{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$.

ii) $\Delta(X)$ es cerrado en $X \times X$.

Ejercicio 15. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice *abierta* si $f(A)$ es abierto para todo abierto $A \subseteq X$ y se dice *cerrada* si $f(F)$ es cerrado para todo cerrado $F \subseteq X$.

i) Suponiendo que f es biyectiva, probar que f es abierta (cerrada) si y sólo si f^{-1} es continua.

ii) Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea abierta.

iii) Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea cerrada.

iv) Mostrar con un ejemplo que una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada pero no continua.

Ejercicio 16. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función.

i) Probar que f es continua si y sólo $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subseteq X$.
Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

ii) Probar que f es continua y cerrada si y sólo si $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subseteq X$.

Ejercicio 17.

i) Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y sea $D \subseteq X$ denso. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones continuas. Probar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

ii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 18. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞.

i) Probar que las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ son continuas y abiertas. Mostrar con un ejemplo que pueden no ser cerradas.

ii) Sea (Z,δ) un espacio métrico y sea $f : Z \longrightarrow X \times Y$ una aplicación. Probar que f es continua si y sólo si $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$ lo son.

Ejercicio 19. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *semicontinua inferiormente* (resp. *superiormente*) en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,x_0) < \delta \Longrightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) \qquad (\text{resp. } f(x_0) + \varepsilon > f(x)).$$

Probar que:

i) f es continua en x_0 si y sólo si f es semicontinua inferiormente y superiormente en x_0.

ii) f es semicontinua inferiormente si y sólo si $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii) f es semicontinua superiormente si y sólo si $f^{-1}(-\infty, \alpha)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv) si $A \subseteq X$ y $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ es su función característica, entonces χ_A es semicontinua inferiormente (resp. superiormente) si y sólo si A es abierto (resp. cerrado).

B. Separabilidad

Ejercicio 20. Probar que $\mathbb{R}^n$ (con la distancia euclídea) es separable.

Ejercicio 21. Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \exists\, n_0 : a_n = 0\ \forall\, n \geq n_0\}$. Se considera la aplicación $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$ es un espacio métrico separable.

Ejercicio 22. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una familia $\mathcal{A} = (U_j)_{j\in J}$ de abiertos de X es una *base de abiertos de* X si todo abierto de X se puede escribir como unión de miembros de $\mathcal{A}$. Probar que $\mathcal{A}$ es una base de abiertos de X si y sólo si verifica la siguiente condición: "Para todo abierto G de X y para todo $x \in G$ existe $j \in J$ tal que $x \in U_j \subseteq G$".

Ejercicio 23. Sea (X, d) un espacio métrico que verifica que cada cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento numerable. Probar que X es separable.

Ejercicio 24. Probar que todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

Ejercicio 25. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de X no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de X es a lo sumo numerable.

Ejercicio 26. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y sólo si (X, d) e (Y, d') son separables.

Ejercicio 27. ¿Es el espacio (ℓ^∞, d_∞) separable?

Ejercicio 28. Sean X, Y espacios métricos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suryectiva. Probar que si X es separable, entonces Y es separable.