

EJERCICIOS PARA ENTREGAR

Ejercicio 1.

- i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión monótona. Probar que:
- (a) Si existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a $\ell \in \mathbb{R}$, entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a ℓ . ¿Qué pasa si la subsucesión tiende a ∞ ?
 - (b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge \iff $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada.
- ii) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es también convergente.
- iii) Encontrar una sucesión **no** convergente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que verifique que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$.
- iv) Analizar la situación del inciso anterior pero con la condición: $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+p}| = 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2. Una partición de \mathbb{N} es una familia de subconjuntos $F = \{P_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, no vacíos tales que $\cup_{i \in I} P_i = \mathbb{N}$ y $P_i \cap P_j = \emptyset$ para todos $i, j \in I$, $i \neq j$.

- i) Probar que si $F = \{P_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es una partición, entonces I es contable, es decir, a lo sumo numerable.
- ii) Calcular $\#\{F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) : F \text{ es una partición de } \mathbb{N}\}$.

Ejercicio 3.

- i) Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$. Probar que d' es una métrica en X topológicamente equivalente a d (o sea, que ambas dan lugar a una misma noción de conjunto abierto). Observar que $0 \leq d'(x, y) < 1$ para todo $x, y \in X$.
- ii) Sea $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que $0 \leq d_n(x_n, y_n) \leq 1$ para todo par de elementos $x_n, y_n \in X_n$. Para cada $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definimos:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

- iii) Sea (\mathbb{R}, d) el conjunto de los números reales con la métrica usual. Mostrar que aplicando i) y ii) se le puede dar una métrica a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- iv) Sea $A = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_n > x_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Calcular \bar{A} .

Ejercicio 4.

- i) Consideremos el espacio métrico (X, d) donde $X = \{f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] : f \text{ es continua}\}$ y d esta dada por

$$d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|.$$

Sea $E = \{f \in X : f(0) \in \mathbb{Q}\}$. Probar que E es denso en X . ¿Es X separable?

- ii) Consideremos $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ y en este espacio las distancias d_1 y d_∞ dadas por

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \quad \text{y} \quad d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Sea $id : (C[0, 1], d_1) \rightarrow (C[0, 1], d_\infty)$, ¿es continua? ¿y su inversa?

Ejercicio 5. Probar que el conjunto formado por las funciones continuas que tienen algún intervalo de monotonía tiene interior vacío en $(C[a, b], d_\infty)$.

Ejercicio 6. Calcular las componentes conexas y arcoconexas del siguiente subconjunto de \mathbb{R}^2

$$\bar{B}_1(0) \setminus \left\{ t \left(\cos \left(\frac{\pi}{1-t} \right), \sin \left(\frac{\pi}{1-t} \right) \right) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 1) \right\}$$

¿Es localmente conexo?

Ejercicio 7. Consideramos en $C[0, 1]$ la norma 1, esto es

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(s)| ds.$$

Sea $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ el operador dado por

$$Tf(x) = \int_0^x f(s) ds.$$

Demostrar que $\|T\| = 1$.

Ejercicio 8. Sea $\alpha \in (0, 1]$ y sea

$$C^\alpha[0, 1] := \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \sup_{x, y \in [0, 1], x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}.$$

- i) Probar que

$$\|f\|_\alpha := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{x, y \in [0, 1], x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

es una norma en $C^\alpha[0, 1]$ y que hace de este espacio un espacio de Banach.

Observar que $C^\alpha[0, 1]$ está incluido en $C[0, 1]$.

- ii) Probar que

$$B = \{f \in C^\alpha[0, 1] : \|f\|_\alpha \leq 1\}$$

es compacto en $C[0, 1]$.

Ejercicio 9. Probar que existe una única función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que es solución de la siguiente ecuación integral

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)f(y)dy + \phi(x),$$

donde $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Probar que si existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(p) = 0$ y $\nabla f(p) \neq 0$, entonces f se anula en infinitos puntos de \mathbb{R}^n . ¿Y si solo le pedimos que f sea continua y que exista $\nabla f(p)$ en lugar de C^1 ?