

ANÁLISIS COMPLEJO- SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2019

**Práctica N°5. Funciones Analíticas**

1. (a) Considerar la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que  $f$  es  $C^\infty$ . ¿Puede expresarse en algún entorno de  $x = 0$  mediante una serie de potencias?

- (b) Si definimos ahora otra función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la variable compleja  $z$  cambiando  $x$  por  $z$  en la fórmula de i) ¿se obtiene una función holomorfa en  $z = 0$ ?
2. Sea  $f$  entera y  $R$  un número real positivo tal que  $|f(z)| \leq M|z|^n$  para todo  $z$  tal que  $|z| > R$ . Probar que  $f$  es un polinomio de grado menor o igual que  $n$ .
3. Hallar todas las funciones enteras tales que  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 5$ .

4. Sea  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función armónica no sobreyectiva.

- (a) Probar que  $u$  está acotada superior o inferiormente.  
(b) Probar que  $u$  es constante.

Concluir que toda función armónica es constante o sobreyectiva.

5. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función entera y  $z_0$  y  $z_1$  dos números complejos  $\mathbb{R}$ -linealmente independientes tales que  $f(z + z_0) = f(z)$  y  $f(z + z_1) = f(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Probar que  $f$  es constante.
6. (a) Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa,  $f \neq 0$ . Probar que para cada  $a \in \Omega$  tal que  $f(a) = 0$  existen  $n \in \mathbb{N}$  y  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa con  $g(a) \neq 0$  tales que  $f(z) = (z-a)^n g(z)$  para todo  $z \in \Omega$ .  
(b) Con las hipótesis del ítem anterior, verificar que el conjunto de ceros de  $f$  es discreto. Deducir que en todo compacto de  $\Omega$ ,  $f$  tiene sólo un número finito de ceros.
7. (a) ¿Existe  $f$  holomorfa en  $B(0, 1)$  tal que  $f(\frac{1}{2n}) = f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ?  
(b) ¿Existe  $f$  holomorfa en  $B(0, 1)$  tal que  $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{3-2n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}, n > 1$ ?
8. Hallar todas las funciones enteras tales que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)^3 + f\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

9. Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto, conexo y simétrico con respecto a  $\mathbb{R}$  tal que  $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que para todo  $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$  vale que  $f(z) \in \mathbb{R}$ . Probar que para todo  $z \in \Omega$  vale que

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$$

10. Sea  $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(z) = \cos\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ . Verificar que los ceros de  $f$  son los puntos de la forma  $z_n = \frac{n\pi-2}{n\pi+2}$  con  $n$  impar, que  $f$  es holomorfa en  $B(0, 1)$  y el conjunto de ceros de  $f$  tienen un punto de acumulación. ¿Es  $f(z) = 0$  para todo  $z \in B(0, 1)$ ? ¿Contradice esto algún resultado conocido?
11. Sean  $\Omega$  un conjunto abierto y conexo del plano complejo. Sean  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  dos funciones holomorfas que no se anulan en  $\Omega$ . Si existe una sucesión  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  de puntos de  $\Omega$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \Omega$ ,  $a_n \neq a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y además

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)} \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

probar que existe una constante  $c$  tal que  $f(z) = cg(z)$  en  $\Omega$ .

12. Sea  $f$  entera con la siguiente propiedad:

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ existe } n(z) \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^{(n(z))}(z) = 0$$

probar que  $f$  es un polinomio.

13. Demostrar que si  $\Omega$  es un conjunto abierto y conexo del plano complejo,  $f$  y  $g$  son holomorfas en  $\Omega$  y  $\overline{fg}$  es holomorfa en  $\Omega$ , entonces  $g \equiv 0$  o  $f$  es constante.
14. Sea  $\Omega$  un conjunto abierto, acotado y conexo. Consideremos  $n$  puntos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  en el plano  $\mathbb{R}^2$ . Probar que el producto  $\overline{PP_1} \cdot \dots \cdot \overline{PP_n}$  de las distancias de un punto  $P$  en  $\overline{\Omega}$  a los puntos  $P_1, \dots, P_n$  alcanza su máximo en un punto de la frontera de  $\Omega$ .
15. Sea  $f$  una función entera tal que  $f(0) = \frac{1}{2}$  y  $|f(z)| \leq |e^z - \frac{1}{2}|$  para todo  $z$  en  $\mathbb{C}$ . Probar que  $f(z) = e^z - \frac{1}{2}$  para todo  $z$  en  $\mathbb{C}$ .
16. Sean  $C$  un cuadrado en  $\mathbb{C}$  y  $f$  una función continua en  $C$  y holomorfa en el interior de  $C$ . Probar que si  $f$  se anula en uno de los lados de  $C$ , entonces  $f$  es constante.
17. Sean  $\Omega \subset \mathbb{C}$  conexo con  $\overline{\Omega}$  compacto y  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$  continua, holomorfa en  $\Omega$  y no constante tal que  $|f(z)|$  es constante para todo  $z \in \partial\overline{\Omega}$ . Probar que existe  $z \in \Omega$  tal que  $f(z) = 0$ .
18. Formular y demostrar el “principio de módulo mínimo” para funciones holomorfas.
19. Sea  $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  holomorfa. Probar que si existen dos números complejos distintos  $a$  y  $b$  tales que  $f(a) = a$  y  $f(b) = b$ , entonces  $f(z) = z$  para todo  $z$  en  $B(0, 1)$ .

*Sugerencia:* Considerar la función

$$g(z) = \frac{h(z) - a}{1 - \overline{a}h(z)}, \quad \text{con } h(z) = f\left(\frac{z + a}{1 + \overline{a}z}\right)$$

y usar el Lema de Schwarz.

20. Sean  $f, g : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  holomorfas y biyectivas. Probar que si  $f$  y  $g$  coinciden en dos puntos distintos de  $B(0, 1)$ , entonces  $f(z) = g(z)$  para todo  $z$  en  $B(0, 1)$ .
21. Hallar todas las funciones holomorfas  $f : B(0, 1) \rightarrow B(1, 4)$  que verifican simultáneamente  $f(0) = 3$  y  $f(\frac{1}{2}) = 1$ .

22. Sea  $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$  holomorfa tal que  $f(0) = 0$  y  $|f'(0)| = 1$ . Probar que existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $|\lambda| = 1$  tal que  $f(z) = \lambda z$  para todo  $z$  en  $B(0, 1)$ .
23. Hallar todas las funciones holomorfas  $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 2)$  que verifican simultáneamente  $f(0) = 1$  y  $f'(0) = \frac{3}{2}$ .