

ANÁLISIS COMPLEJO - SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2019

Práctica N°10. Automorfismos y Teorema de la aplicación conforme

- (a) Sea f un automorfismo de $B(0, 1)$ tal que $f(0) = 0$. Probar que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\theta}z$ para todo z en $B(0, 1)$.
(b) Probar que $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ es automorfismo si y sólo si existen $\theta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in B(0, 1)$ tales que para todo z en $B(0, 1)$,

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}.$$

- (a) Sea \mathbb{P} el semiplano superior (también llamado el semiplano de Poincaré). Es decir, $\mathbb{P} = \{\text{Im}(z) > 0\}$. Probar que $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ es automorfismo si y sólo si existen a, b, c y $d \in \mathbb{R}$ con $ad - bc > 0$ tales que para todo z en \mathbb{P} ,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

(b) ¿Cuáles son los automorfismos del semiplano inferior?

- Caracterizar todos los automorfismos de $\mathbb{L} = \{\text{Im}(z) > 0, \text{Re}(z) > 0\}$.
- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a - b$ sea un múltiplo racional de π . Dar explícitamente un biholomorfismo ϕ que mande el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : a < \text{Arg}(z) < b\}$ en el disco unidad.
- Caracterizar todos los automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. (Sugerencia: recordar el ejercicio 12 de la práctica 7.)
- Sean Ω un abierto simplemente conexo del plano, f y g dos automorfismos de Ω y a y b dos puntos distintos de Ω . Si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, probar que $f(z) = g(z)$ para todo z en Ω .
- Caracterizar todos los automorfismos de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Sugerencia: estudiar el desarrollo de Laurent en 0 de un tal automorfismo.)