Análisis Complejo — 1^er Cuatrimestre de 2017

Soluciones al Recuperatorio del Primer Parcial

---

1. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ entera y supongamos que $\Re(f)^2 - \Im(f)^2 = 1$. Pruebe que f es constante.

1. Notemos que la hipótesis sobre f dice que $\Re(f^2) = 1$. Si consideramos la función entera $g = \exp(f^2)$ resulta que $|g| = \exp\Re(f^2)$ es constante, y luego g es ella misma constante por el teorema de Liouville. Esto implica que f^2 toma valores en un conjunto discreto de $\mathbb{C}$ y, dado que es continua, esto implica que es constante, y luego f misma es constante por el mismo argumento, como queríamos ver.

Otra forma de resolver el ejercicio es la siguiente.

1. Comencemos por notar que como f^2 tiene parte real 1, f es nunca nula. Escribamos $f = u + iv$ así $u^2 - v^2 = 1$. Si derivamos esto respecto de x y respecto de y obtenemos que

$$
\begin{aligned}
uu_x + vv_x &= 0 \qquad & uu_x - vu_y &= 0 \\
uu_y + vv_y &= 0 \qquad & uu_y + vu_x &= 0
\end{aligned}
$$

donde las ecuaciones de la derecha se obtienen de las de la izquierda usando las ecuaciones de Cauchy–Riemann para f. Podemos escribir esto en la forma $A(u_x, u_y)^t = 0$ donde $A = \left(\begin{smallmatrix} u & -v \\ v & u \end{smallmatrix}\right)$. Dado que la matriz a la izquierda tiene determinante $|f|^2$, que es nunca nulo, deducimos que $u_x = u_y = 0$. Por simetría, resulta que $v_x = v_y = 0$, y esto prueba que f es constante.

Una tercera forma de resolver el ejercicio es la siguiente.

1. Otra vez, f es nunca nula. Además $|f|^2 \geqslant \Re(f)^2 \geqslant 1$ por hipótesis. Esto dice que la función entera $1/f^2$ es acotada, y el teorema de Liouville prueba que f^2 es constante, así f toma valores en un conjunto discreto y, como es una función continua, es también constante, como queríamos.

2. Pruebe que no existe ninguna función entera $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(n^{-1}) = \exp(-n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

> **2.** Supongamos, por el absurdo, que existe tal función entera, y sea $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ su desarrollo en serie de Taylor en torno al origen. Vamos a probar que $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, que es evidentemente incompatible con el hecho que f es no nula en los puntos de la forma n^{-1} con $n \in \mathbb{N}$. A este fin, notemos que $f(0) = 0 = a_0$ por continuidad. Supongamos ahora que $n \geqslant 1$ y que probamos que para $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ vale que $f^{(k)}(0) = 0$, Veamos que $f^{(n)}(0) = 0$. Para hacer esto, notemos que
>
> $$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z^n} = a_n$$
>
> y que por hipótesis podemos calcular el límite de la izquierda como
>
> $$\lim_{k\to\infty} k^n f(k^{-1}) = \lim_{k\to\infty} k^n e^{-k} = 0.$$
>
> Esto da lo que queríamos.

3. Sea $\mathbb{E}$ el disco unidad y supongamos que $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $\mathbb{E}$. Pruebe que o bien f tiene un cero en $\mathbb{E}$, o existe una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{E}$ tal que

- $\lim_{n\to\infty} |z_n| \to 1$ y
- $\limsup_{n\to\infty} |f(z_n)| < \infty$.

> **3.** Supongamos que f no se anula sobre $\mathbb{E}$, y construyamos una sucesión que cumple lo pedido. Para esto, sea $g = 1/f$, que también es holomorfa sobre $\mathbb{E}$, y definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $B_n = \partial B_{1-1/n}$ y tomemos $z_n \in B_n$ con la propiedad que
>
> $$s_n = |g(z_n)| = \max_{w\in B_n} |g(w)|.$$
>
> El teorema del módulo máximo asegura que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, y en particular que $|f(z_n)| \leqslant |f(z_1)| = |f(0)|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Resulta que la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple lo pedido.

Notemos que la sucesión $(|f(z_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ que construímos en la solución anterior, además de ser acotada, es convergente.

4. Determine el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}$ y analice su comportamiento en el borde del disco de convergencia.

4. Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right|\left|\frac{1}{n}\right|^{-1}=1.$$

El criterio de D'Alambert asegura entonces que la serie converge si $|z|<1$ y diverge si $|z|>1$, esto es, que su radio de convergencia es 1. Es claro que la serie diverge si $z=1$. Veamos que converge en todo punto de $\partial\mathbb{E}$ distinto del 1. Para un tal z, podemos hacer la estimación

$$\left|\sum_{n=1}^{N} z^n\right| = \left|z\frac{1-z^N}{1-z}\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|}.$$

Como $(n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números positivos y decrecientes que tiende a cero y como verificamos que las sumas parciales $S_N(z)=\sum_{n=1}^{N} z^n$ están acotadas, el criterio de Dirichlet asegura que la serie converge en z. Concluímos que la serie convergen en todo punto de $\overline{\mathbb{E}}$ salvo en el 1.

5. Sea $f:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{C}$ holomorfa y supongamos que tiene un desarrollo en serie de Taylor $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Pruebe que

- La serie $g(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n/n!$ converge absolutamente en todo punto de $\mathbb{C}$, y define allí una función entera.
- Existen un constantes $\rho,\mu\geqslant 0$ tal que $|g(z)|\leqslant \mu e^{\rho|z|}$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

5. Las desigualdades de Cauchy dicen que para todo $n\in\mathbb{N}_0$ tenemos que $|a_n|\leqslant |f|_{\partial B_{1/2}}2^{-n}$. Esto implica que si $z\in\mathbb{C}$ entonces

$$\sum_{n\geqslant 0}|a_n||z|^n/n! \leqslant |f|_{\partial B_{1/2}}\sum_{n\geqslant 0}|z/2|^n/n! = |f|_{\partial B_{1/2}}\exp(|z|/2),$$

que prueba que la serie g converge absolutamente en todo $\mathbb{C}$. Dado que las series de potencias son holomorfas en su disco de convergencia, esto prueba que g define una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$, y la cota que acabamos de encontrar prueba la validez del segundo ítem con $\mu=|f|_{\partial B_{1/2}}$ y $\rho=1/2$.

Notemos que en el ejercicio anterior podemos tomar $\rho=r$ y $\mu=|f|_{\partial B_r}$ para cualquier $r\in(0,1)$.