Teoremas fundamentales sobre funciones holomorfas

Pedro Tamaroff

1. Control de las derivadas

I. Estimaciones de Cauchy

Fijemos una región Ω en $\mathbb{C}$ y una función holomorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Veamos que el crecimiento de las derivadas de f está controlado por ella.

Proposición 1.1. *Sea B un disco de radio r y centro c con clausura contenida en Ω y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

1. *Para cada $z \in B$ vale que $|f^{(n)}(z)| \leqslant rn!\dfrac{|f|_{\partial B}}{d(z)^{n+1}}$, donde $d(z)$ es la distancia de z al borde de B.*
2. *Si $B' = B(c, r-s)$ con $0 < s < r$ entonces $|f^{(n)}|_{B'} \leqslant rn!\dfrac{|f|_{\partial B}}{s^{n+1}}$.*
3. *Si $M(r) = |f|_{\partial B_r(c)}$, entonces $|a_n|r^n \leqslant M(r)$, donde $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-c)^n$ es el desarrollo en serie de potencias de f en torno a c.*

Notemos que el tercero de los resultados nos da la constante M del lema de Abel que prueba que la serie de potencias de f en torno a c tiene radio de convergencia positivo.

Demostración. Fijemos $z \in B$ y $n \in \mathbb{N}$. Por la fórmula integral de Cauchy, tenemos que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$$

y luego la estimación estándar da la primera afirmación. En efecto, tenemos que

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!}{2\pi}2\pi r|f|_{\partial B} \max_{\xi\in\partial B} |z-\xi|^{-n-1},$$

y $\max_{\xi\in\partial B} |z-\xi|^{-1} = \min_{\xi\in\partial B} |z-\xi|$ no es otra cosa que la distancia de z al borde de B. La segunda se deduce inmediatamente de la primera, pues en ese caso $s \leqslant d(z)$. Finalmente, para ver la tercera notamos que la segunda vale, en el caso que $z = c$, para todo $0 < s < r$. Haciendo que $s \longrightarrow r$, obtenemos lo que queremos, notando que $a_n = f^{(n)}(c)/n!$. Esto completa la demostración. ◄

Veamos que podemos obtener estimaciones del crecimiento de las derivadas de f no solo en discos compactos, como afirma el segundo ítem de la proposición anterior, si no en conjuntos compactos arbitrarios.

Teorema 1.2. *Sea K compacto contenido en Ω y sea L un entorno compacto de K contenido en Ω. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una constante M_n, que depende solo de Ω, K y L, tal que para toda función $f \in \mathscr{O}(\Omega)$,*

$$|f^{(n)}|_K \leqslant M_n |f|_L.$$

Demostración. Fijemos $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ y tomemos K y L como en el enunciado del teorema. Para cada punto $z \in K$ existen discos B', B con $\overline{B'} \subseteq B$ y $\overline{B} \subseteq L$, y una constante C_n, que depende de z y L tal que $|f^{(n)}|_{B'} \leqslant C|f|_{\partial B}$. Los discos B' asi obtenidos cubren a K, y luego existen finitos de ellos, digamos $B'_1, \ldots, B'_t$, que cubren a K. Dado que $|f|_{\partial B_i} \leqslant |f|_L$ para cada uno de los respectivos discos B_i, es suficiente elegir M_n como el máximo de las respectivas constantes $C_1, \ldots, C_t$ para obtener que

$$|f^{(n)}|_K \leqslant M_n |f|_L,$$

como afirma el teorema. ◀

II. El teorema de Liouville

Veamos una aplicación de la ***desigualdad de Cauchy***

$$|a_n| r^n \leqslant |f|_{\partial B_r(c)},$$

válida para toda función holomorfa en un entorno de c y cuya serie $\sum a_n (z-c)^n$ en torno a ese punto tiene radio de convergencia mayor a r, que obtuvimos en la Proposición 1.1.

Teorema 1.3. (Teorema de Liouville) *Toda función entera y acotada es constante.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ entera y acotada, y consideremos el desarrollo en serie de $f = \sum a_n z^n$, que sabemos converge en *todo* $\mathbb{C}$. Si M es tal que $|f| \leqslant M$, entonces para todo $r > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$ vale, por la desigualdad de Cauchy, que $|a_n| r^n \leqslant M$. Como $r > 0$ es arbitrario, deducimos que $a_n = 0$ si $n > 0$, y luego es el caso que $f = a_0$ es una función constante. ◀

Una aplicación interesante del teorema de Liouville es la siguiente.

Proposición 1.4. *La imagen de una función entera no constante es densa en* $\mathbb{C}$.

Demostración. Supongamos, por el absurdo, que existe un punto $w \in \mathbb{C}$ y un disco $B(w,r)$ de modo que $f(\mathbb{C}) \cap B(w,r) = \varnothing$. Esto implica que para todo $z \in C$ vale que $|f(z) - w| \geqslant r > 0$, o, lo que es lo mismo, que la función holomorfa

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

está acotada. Pero esto implica que g, y luego f, es constante, contra nuestra hipótesis. ◀

Esta proposición vaticina un resultado famoso de Émile Picard, que afirma que, de hecho, la imagen de cualquier función holomorfa no constante es, o bien todo $\mathbb{C}$, o bien $\mathbb{C}$ menos un punto. Ya conocemos ejemplos de esto: $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, mientras que $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus 0$.

El teorema de Liouville da una —entre muchas!— formas de probar que todo polinomio no constante con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene al menos una raíz compleja.

Teorema 1.5. *Todo polinomio no constante tiene una raíz compleja.*

Demostración. Sea p un polinomio en $\mathbb{C}[X]$, y supongamos que no tiene ninguna raíz. Entonces la función $f(z) = p(z)^{-1}$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Sin embargo, $|f(z)| \longrightarrow 0$ cuando $|z| \longrightarrow \infty$. Resulta que f es entera y acotada, y luego es constante. Deducimos que lo mismo es cierto para p, en contra de nuestra hipótesis. Esto prueba el teorema. ◀

2. Tres teoremas fundamentales

The values that an analytic function assume in the different parts of its domain of existence are related to each other: they are connected by analytic continuation and it is impossible to modify the values in one part without inducing change throughout. Therefore an analytic function can be compared to an organism the main characteristic which is exactly this: Action on any part calls forth a reaction of the entire system. — George Pólya y Gabor Szegö en [2].

En lo que sigue fijamos una región $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y una función holomorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

I. El teorema de la identidad

Ya sabemos que las funciones holomorfas son analíticas, y esto implica que heredan, esencialmente, todas las propiedades buenas que tienen las series de potencias convergentes. El siguiente teorema es el reflejo sobre las funciones holomorfas del hecho que una serie de potencias queda unívocamente determinada por sus coeficientes.

Teorema 2.1. (Teorema de la indentidad) *Sea g holomorfa en Ω. Son equivalentes,*

1. $f = g$,
2. *El conjunto $C = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ tiene un punto de acumulación en Ω,*
3. *Existe $c \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Es trivial que (1) $\Longrightarrow$ (2). Si, por otro lado, c es un punto de acumulación de C en Ω, y digamos que (c_n) es una sucesión en $\Omega \smallsetminus c$ que tiende a c. Entonces ciertamente $f(c) = g(c)$. Podemos considerar ahora la serie de potencias $h = \sum a_n (z-c)^n$ de $f - g$. Por lo anterior $h(z) = (z-c)h_1(z)$ donde $h_1(c) = h'(c)$, y $h_1(c_n) = 0$ para todo n. Luego haciendo $n \to \infty$ es $h_1(c) = 0$. Continuando de esta manera, obtenemos que

$h^{(n)}(c) = 0$ para cada natural $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, consideremos el conjunto

$$T = \left\{ z \in \Omega : h^{(n)}(z) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Como cada derivada $h^{(n)}$ es continua, este conjunto es cerrado en Ω. Pero es también abierto en Ω: si $z_0 \in T$ y la serie de Taylor de h en z_0 converge en un disco $B \subseteq \Omega$, entonces ciertamente $B \subseteq T$. Si vale (3), entonces T es no vacío, y luego $T = \Omega$ en vista de la conexión de Ω. Esto implica que $f = g$. ◀

El teorema de la identidad asegura que para cada $c \in \Omega$, existen solo finitos $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(c) = 0$. Llamamos al primer $\mu \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^{(\mu)}(c) \neq 0$ el ***orden de f en c***, y lo notamos $o_c(f)$; esto define, para cada $c \in \Omega$, una función $o_c : \mathscr{O}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{N}_0$. Además, $o_c(f)$ coincide con el orden del desarrollo en serie de potencias de $f(z+c)$ en torno al origen. Análogamente, definimos la ***multiplicidad de f en w*** como el número de raíces de $f(z) = f(c)$, y lo notamos $\mu(f,c)$.

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es la siguiente caracterización de las soluciones a la ecuación $f(z) = w$ para $w \in C$.

Teorema 2.2. (Fibras discretas) *Sea f no constante. Para cada $w \in \mathbb{C}$ el conjunto $f^{-1}(w) = \{z \in \Omega : f(z) = w\}$ es discreto en Ω y a lo sumo numerable.*

Llamamos a $f^{-1}(w)$ la ***fibra de f sobre w***, que le da nombre a nuestro teorema. Ya conocemos un ejemplo de este fenómeno: el conjunto de soluciones de la ecuación $\exp z = 1$ es el subconjunto numerable y discreto $2\pi i\mathbb{Z}$ de $\mathbb{C}$.

Demostración. Fijemos $w \in \mathbb{C}$. Por definición, la fibra $F = f^{-1}(w)$ es un conjunto cerrado. Supongamos que c es un punto de acumulación de F. Entonces $c \in F$, y luego el conjunto donde f coincide con la función constante w tiene un punto de acumulación en Ω, y resulta f constante, contra nuestra hipótesis. Luego F es discreto.

Para ver que F es a lo sumo numerable, notemos que para todo compacto K en Ω, el conjunto $K \cap F$ es compacto y si es infinito, admite un punto de acumulación en K, que ya vimos es imposible. Luego $K \cap F$ es finito para cada compacto K de Ω, y esto implica que F es a lo sumo numerable, pues Ω puede expresarse como la union creciente de numerables compactos. Esto completa la demostración. ◄

Ejercicio 2.1. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\Omega_n = \{z \in \Omega : |z| \leqslant n \text{ y } d(z, \partial\Omega) \geqslant n^{-1}\}.$$

Probar que valen las siguientes propiedades:

1. Ω_n es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$,
2. $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \cdots$,
3. $\Omega = \bigcup_{n \geqslant 1} \Omega_n$.

Obtener así una prueba de la última afirmación en la demostración anterior.

II. El teorema del módulo máximo

La siguiente ***fórmula de Gutzmer*** es un refinamiento de las desigualdades de Cauchy de la Proposición 1.1.

Proposición 2.3. *Supongamos que f tiene un desarrollo en serie de potencias*

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n (z-c)^n$$

en un entorno de c, que esta serie tiene radio de convergencia mayor a r, y sea $M(r) = |f|_{\partial B_r(c)}$. Entonces

$$\sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c + re^{it})|^2 dt \leqslant M(r)^2.$$

Demostración. Consideremos la función $g : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(t) = f(c+re^{it})$, esto es

$$g(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_n r^n e^{int}.$$

Por la fórmula integral de Cauchy, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c+re^{it})e^{-int}dt = a_n r^n,$$

y luego,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(c+re^{it})|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\geqslant 0} \overline{a_n} f(c+re^{it}) r^n e^{-int}\, dt \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{a_n} f(c+re^{it}) r^n e^{-int}\, dt \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |a_n|^2 r^{2n},\end{aligned}$$

donde el intercambio entre la integral y la suma está justificado por la convergencia normal de la serie que representa a f. Esto prueba la igualdad del enunciado, y la desigualdad derecha se deduce de la estimación estándar. ◀

De esta fórmula deducimos que para todo natural n vale la estimación de Cauchy $|a_n|r^n \leqslant M(r)$ —algo que ya sabiamos era cierto— pero deducimos además el siguiente corolario.

Corolario 2.4. *Si para algún $n \in \mathbb{N}$ es $|a_n|r^n = M(r)$, entonces $a_m = 0$ para todo $m \neq n$, y luego $f = a_n(z-c)^n$.*

Demostración. En efecto, si $|a_n|r^n = M(r)$ entonces $\sum_{n\neq\mu} |a_\mu|^2 r^{2\mu} \leqslant 0$, que fuerza que todos los términos que aparecen en esta suma sean nulos. ◀

Este corolario es todo lo que necesitamos para probar el próximo teorema fundamental sobre funciones holomorfas.

Teorema 2.5. (El teorema del módulo máximo) *Supongamos que existe $c \in \Omega$ y un entorno U de c tal que $|f(c)| = |f|_U$ —esto es, que c es un máximo local de Ω. Entonces f es constante en Ω.*

Demostración. En este caso el corolario anterior afirma que el desarrollo en serie de potencias de f en torno a c es la serie constante $f(c)$. Por el teorema de la identidad, resulta f constante en todo Ω. ◀

Corolario 2.6. (El teorema del módulo mínimo) *Supongamos que existe $c \in \Omega$ y un entorno U de c tal que $|f(c)| = \min_{z \in U} |f(z)|$. Si f no es constante, $f(c) = 0$.*

Demostración. Basta notar que si $f(c) \neq 0$, la funcion $g = 1/f$ es holomorfa en algun entorno $V \subseteq U$ de c, y tiene ahí un máximo local en c. ◀

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del Teorema 2.5.

Teorema 2.7. *Sea Ω una región acotada en $\mathbb{C}$, y sea $g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y holomorfa en Ω. Entonces el máximo de g en Ω ocurre en $\partial\Omega$.*

Demostración. Si g es constante, la afirmación es inmediata. Podemos asumir, entonces, que g no es constante. Como Ω es acotado, $\overline{\Omega}$ es compacto, así g asume su valor máximo en alguno de sus puntos. Por el teorema del módulo máximo, este punto no puede ser interior a $\overline{\Omega}$. ◀

III. El teorema de la aplicación abierta

El último de los tres teoremas sobre funciones holomorfas que queremos probar es el siguiente.

Teorema 2.8. (El teorema de la aplicación abierta) *La imagen de cualquier abierto de Ω bajo f es también un conjunto abierto.*

Nuestra demostración se basa en una idea similar a la demostración del Corolario 2.6.

Proposición 2.9. *Sea B un disco abierto con centro c y clausura contenida en Ω, y supongamos que $\min_{z \in \partial B} |f(z)| > |f(c)|$. Entonces f tiene un cero en B.*

Demostración. Supongamos que f no tiene ceros en B. Entonces $g = 1/f$ es una función holomorfa en un entorno de B, y luego por la desigualdad de Cauchy,

$$|g(c)| \leqslant \max_{z\in\partial B} |g(z)| = \left(\min_{z\in\partial B} |f(z)|\right)^{-1},$$

que va en contra de nuestra hipótesis. ◀

De lo anterior deducimos el siguiente corolario, que es una versión cuantitativa del teorema de la aplicación abierta: determina de forma precisa el tamaño de una bola contenida en $f(B)$ en torno a $f(c)$ en términos de los valores que asume f en ∂B.

Corolario 2.10. *Supongamos que* $2\delta := \min_{z\in\partial B} |f(z) - f(c)| > 0$*. Entonces* $f(B) \supseteq B(f(c), \delta)$*.*

Demostración. Consideremos un $b \in \mathbb{C}$ con $|f(c) - b| < \delta$. Si tomamos $z \in \partial B$, tenemos que

$$|f(z) - b| \geqslant |f(z) - f(c)| - |b - f(c) \geqslant \delta,$$

así $\min_{z\in\partial B} |f(z) - b| > |f(c) - b|$. La proposición anterior asegura que $b = f(z)$ para algún $z \in B$ y esto prueba lo que afirma el corolario. ◀

Podemos dar ahora la

Demostración del Teorema 2.8. Dado $c \in \Omega$, la hipótesis que f no es constante y el teorema de la identidad aseguran que existe una bola B con clausura contenida en Ω tal que $f(c) \notin f(\partial B)$: de lo contrario, existiría una sucesión de puntos, convergentes a c donde f toma siempre el valor $f(c)$. Resulta entonces que $\min_{z\in\partial B} |f(z) - f(c)| = 2\delta > 0$, y luego el corolario anterior implica que $f(B) \supseteq B(f(c), \delta)$, y esto es suficiente para probar que *todo* abierto de Ω tiene imagen abierta bajo f, como afirma nuestro teorema. ◀

Ejercicio 2.2. Dar una prueba la última afirmación que hicimos en la demostración anterior.

3. Extensión de funciones holomorfas

I. El teorema de continuación de Riemann

Una de las consecuencias del teorema de Goursat es que una función que es holomorfa en toda una región Ω salvo, posiblemente, un punto de ella, es de hecho holomorfa en todo Ω. Veamos un refinamiento de este hecho, atribuído a Bernhard Riemann.

Fijemos una región Ω en $\mathbb{C}$ y una función $f : \Omega \smallsetminus c \longrightarrow \mathbb{C}$. Si f es continua, decimos que f se ***extiende de forma continua sobre Ω*** si existe una función continua definida en Ω que se restringe a f en $\Omega \smallsetminus c$. El lector puede deducir que significa que f se ***extiende de forma holomorfa sobre Ω*** reemplazando todas las instancias de la palabra "continua" por la palabra "holomorfa" en la oración anterior.

Teorema 3.1. (Teorema de continuación de Riemann) *Si f es holomorfa, son equivalentes:*

1. *f se extiende de forma holomorfa sobre Ω,*
2. *f se extiende de forma continua sobre Ω,*
3. *f está acotada en un entorno de c,*
4. $\lim_{z\to c}(z-c)f(z) = 0$.

Demostración. Está claro que (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (4). Veamos que (4) $\implies$ (1). Sin perder generalidad, podemos asumir que $c = 0$. Consideremos las funciones g y h tal que $g(z) = zf(z)$ si $z \in \Omega \smallsetminus 0$ y $g(0) := 0$, y $h(z) = zg(z)$.

Dado que g es continua en 0 por hipótesis, la función h es derivable en 0, y $h'(0) = g(0) = 0$, así h es holomorfa en todo Ω, y en particular admite un desarrollo en series de potencias centrado en 0. Como $h(0) = h'(0) = 0$, este desarrollo es de la forma

$$h(z) = z^2(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots) = z^2 h_1(z)$$

y la serie de potencias $h_1(z)$ es la extensión holomorfa de f buscada en un entorno del origen. ◂

Notemos que lo anterior prueba que la misma conclusión es válida si asumimos que f es holomorfa en todo Ω salvo, posiblemente, en un subconjunto discreto D de puntos de Ω, donde la condición (4) vale para cada $c \in D$.

II. Singularidades en la frontera

Fijemos una función analítica $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. En cada punto c de Ω, f admite entonces una representación como serie de potencias que converge en algún disco B contenido en Ω. Puede suceder, sin embargo, que esta serie de potencias tenga un radio de convergencia mayor, y luego que f esté bien definida en algún abierto que contiene propiamente a Ω. Diremos que f tiene un ***punto singular*** en $c \in \partial\Omega$ si no existe una serie de potencias g definida en un entorno B de c que coincide con f en $\Omega \cap B$.

Proposición 3.2. *Supongamosque Ω es un disco $B = B(c,r)$ y que el desarrollo en serie de potencias de f en torno a c tiene radio de convergencia exactamente r. Entonces f tiene necesariamente un punto singular en ∂B.*

En este sentido, el radio de convergencia $R_f(c)$ detecta la singularidad más próxima de f a c.

Demostración. Supongamos que ninguún punto de ∂B es singular para f, y veamos que la serie de potencias de f en torno a c converge en un disco con centro c y estrictamente más grande que B. Por hipótesis, para cada $z \in \partial B$ existe un disco B_z en torno a z y una función holomorfa que coincide con f en $B_z \cap B$. Como ∂B es compacto, existen finitos discos, que renombramos $B_1, \ldots, B_n$, que cubren a ∂B. En cada disco B_i tenemos la correspondiente función holomorfa que notamos g_i. Podemos asumir que entre estos finitos discos ninguno está contenido en otro, pues si es

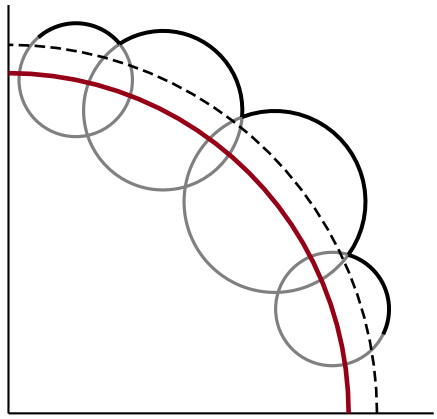

Figura 1: Podemos agrandar el radio de convergencia de f.

el caso podemos descartar el más pequeño, y los restantes son también un cubrimiento de B.

Por el teorema de la identidad, si $B_i \cap B_j$ es no vacío, $g_i = g_j$ en tal intersección. Tiene entonces sentido que definamos una función

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in B, \\ g_i(z) & \text{si } z \in B_i. \end{cases}$$

Esta función es holomorfa en $\Omega = B \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n$ y, por el Teorema de Representación, su serie de potencias en torno a c converge en cualquier disco contenido en esta unión. Pero por construcción —como se aprecia en la Figura 1— $d(c, \partial\Omega) > r$, y esto contradice que r es el radio de convergencia de f en c, y completa la demostración de la proposición. ◂

Ejercicio 3.1. Probar de modo más formal que, en la demostración anterior, la distancia de c al borde de Ω es estrictamente mayor a r.

4. Funciones biholomorfas

Recordemos que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y Ω es una región. Diremos que una función holomorfa $g : \Omega \longrightarrow \Omega'$ es biholomorfa si es biyectiva y su inversa es también holomorfa. Diremos que g es localmente biholomorfa en $c \in \Omega$ si es biholomorfa en un entorno de c contenido en Ω.

I. Raíces e inyectividad local

Proposición 4.1. *Sea $c \in \Omega$, y supongamos que el orden de f en c es n. Entonces existe una única función holomorfa $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z-c)^n g(z)$ y $g(c) \neq 0$.*

Demostración. La expresión de f en términos de g prueba su unicidad, si existe. Para ver la existencia de g, notemos que la función $g(z) = (z-c)^{-n} f(z)$ es holomorfa en $\Omega \smallsetminus c$. Además, por la forma en que elegimos n, g es continua en c. Por el teorema de continuación de Riemann, g es holomorfa en Ω, y además $n! g(c) = f^{(n)}(c) \neq 0$. ◂

Corolario 4.2. *Supongamos que B es un disco con centro c y clausura contenida en Ω y que la única raíz de f en $\overline{B}$ es c. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = o_c(f).$$

Demostración. Escribamos $f = (z-c)^n g$ donde $n = o_c(f)$ y g no se anula en c. Como c es la única raíz de f en c, g no se anula en ningún punto de $\overline{B}$, y luego no lo hace en un entorno que contiene a $\overline{B}$. Por otro lado,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-c} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

así resulta que,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{1}{z-c} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

Sin embargo la última integral se anula, pues $g'(z)/g(z)$ es holomorfa en algún disco convexo $B' \supseteq \overline{B}$ contenido en Ω. Obtenemos así la fórmula del enunciado. ◂

El siguiente lema muestra, por un lado, que el cociente incremental de f tiende de forma uniforme a $f'(c)$ y, por otro, que f es localmente inyectiva si su derivada no se anula.

Lema 4.3. *Sea B un disco con centro c y clausura contenida en Ω. Para cada par de números distintos $z, w \in B$,*

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(c) \right| \leqslant |f' - f'(c)|_B.$$

En particular, si $f'(c) \neq 0$ y si B es tal que $|f' - f'(c)|_B < |f'(c)|$, f es inyectiva en B.

Demostración. La primera estimación se sigue de que

$$f(z) - f(w) - f'(c)(z - w) = \int_{[z,w]} (f'(\xi) - f'(c)) d\xi,$$

y la estimación estándar. Dejamos el cálculo ya rutinario a manos del lector. Para ver la segunda afirmación, notemos que $f'(c) \neq 0$ podemos elegir B para que $|f' - f'(c)|_B < |f'(c)|$ pues f' es continua. Si $z \neq w$ están en B pero $f(z) = f(w)$, la primera parte del lema implica que $|f'(c)| < |f'(c)|$, que ciertamente es imposible. Así f es inyectiva en B, como dijimos. ◀

II. Criterio de biholomorfía

Teorema 4.4. *Supongamos que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es inyectiva. Entonces $f(\Omega) = \Omega'$ es una región y f' no se anula en Ω. Además, $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ es biholomorfa y si g es su inversa*

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$$

para todo $w \in \Omega'$.

Demostración. Como f es inyectiva, en particular no es constante, y por el teorema de la aplicación abierta, Ω' es una región. Además, la inversa $g : \Omega' \longrightarrow \Omega$ es continua, pues f es abierta.

Como f es inyectiva, f' no puede anularse idénticamente en ningún disco de Ω, así nuevamente por el teorema de la identidad se anula en un conjunto N cerrado y discreto de Ω. Como f es abierta, $f(N) = M$ es también cerrado y discreto en Ω'.

Tomemos ahora $w \in \Omega' \setminus M$ y sea $z = g(w)$. Como f es derivable en z, existe f_1 continua tal que $f_1(z) = f'(z) \neq 0$ y

$$f(\xi) = f(z) + (\xi - z)f_1(\xi).$$

Esto nos permite escribir, para $\xi = g(\eta)$ y $g_1 = f_1 \circ g$,

$$\eta = w + (g(\eta) - g(w))g_1(\eta).$$

Como $g_1(w) = f'(g(w)) \neq 0$, existe un entorno de w donde

$$g(\eta) - g(w) = g_1(\eta)^{-1}(\eta - w),$$

que prueba que g es derivable en w y $g'(w) = f'(g(w))^{-1}$.

Resulta que g es holomorfa en $\Omega' \setminus M$ y continua en Ω' y luego, por el teorema de continuación de Riemann, es holomorfa en todo Ω'. Además, vale que $g'(w)f'(g(w)) = 1$ para todo $w \in \Omega' \setminus M$. Por el teorema de la identidad, esto es cierto es todo Ω, así $f' \neq 0$ en todo Ω. Esto completa la demostración del teorema. ◂

Veamos ahora una resultado análogo para funciones holomorfas al teorema de la función inversa del análisis elemental.

Teorema 4.5. *Una condición necesaria y suficiente para que f sea localmente biholomorfa en un punto $c \in \Omega$ es que $f'(c) \neq 0$.*

Demostración. Si $f'(c) \neq 0$, el Lema 4.3 asegura que existe un disco B con centro c y contenido en Ω donde f es inyectiva. El Teorema 4.4 implica que f es biholomorfa en B. Está claro, por otro lado, que si f es biholomorfa en un entorno de c, entonces $f'(c) \neq 0$, como vimos en la demostración del Teorema 4.4. ◂

III. Forma local normal

El siguiente teorema nos da una escritura canónica local para f, que usaremos enseguida para ver que, salvo un cambio de coordenadas holomorfo, f se comporta como la función $z \longmapsto z^m$ en un punto $c \in \Omega$ donde $m = \mu(f, c)$.

Teorema 4.6. *Supongamos que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no constante y tomemos $c \in \Omega$. Existe un disco $B \subseteq \Omega$ con centro c y una función biholomorfa $h : B \longrightarrow B'$ tal que*

$$f = f(c) + h^m \text{ en } B,$$

donde $m = \mu(f, c)$. Además, tal escritura es única, en el sentido que si $\tilde{B}$ es otro disco con centro en c y si $\tilde{h} : \tilde{B} \longrightarrow \tilde{B}'$ es holomorfa, $\tilde{h}'(c) \neq 0$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f = f(c) + \tilde{h}^n \text{ en } \tilde{B}, \tag{1}$$

entonces $m = n$ y existe una raíz m-ésima de la unidad ζ tal que $h = \zeta\tilde{h}$ en $B \cap \tilde{B}$.

Llamamos a el término derecho de (1) una ***forma local normal de f en c***.

Demostración. Para ver que tal escritura de f existe, escribamos $f(z) = f(c) + (z - c)^m g(z)$ donde g es holomorfa y no se anula en un disco con centro en c. Como este disco es convexo, g admite allí un logaritmo, y luego admite, en particular, una raíz m-ésima q. Si ponemos $h = (z - c)q$ entonces $h'(c) = q(c) \neq 0$, pues $q(c)^n = g(c) \neq 0$, así podemos elegir un disco B posiblemente más pequeño donde h es biholomorfa, y donde $f = f(c) + h^n$, como queríamos.

Para ver que tal escritura es única, tomemos $\tilde{B}$, n y $\tilde{h}$ como en el enunciado del teorema. Como tanto h como $\tilde{h}$ tienen orden 1 en c, h^m tene orden m en c y $\tilde{h}^n$ tiene orden n en c, y como coinciden en $B \cap \tilde{B}$, $n = m$. Finalmente, como h y $\tilde{h}$ son ambas raíces m-ésimas de $f -$

$f(c)$, deducimos que $h = \zeta\tilde{h}$ para alguna raíz m-ésimas de la unidad, que completa la demostración del teorema. ◂

Podemos ahora enunciar precisamente y probar la afirmación que hicimos al comienzo de esta sección.

Teorema 4.7. *Para cada $c \in \Omega$ existe un entorno U de c en Ω, un disco V con centro $f(c)$ y funciones $u : U \longrightarrow \mathbb{E}$, $v : \mathbb{E} \longrightarrow V$ tal que*

1. *u es biholomorfa y $u(c) = 0$,*
2. *v es lineal y $v(0) = f(c)$,*
3. *$f(U) = V$ y*
4. *$f : U \longrightarrow V$ se factoriza como*

$$U \xrightarrow{u} \mathbb{E} \xrightarrow{z \mapsto z^m} \mathbb{E} \xrightarrow{v} V$$

donde $m = \mu(f, c)$.

Demostración. Por el Teorema 4.6 existe un disco B con centro en c y una función biholomorfa $h : B \longrightarrow h(B)$ tal que $f = f(c) + h^m$ en B. Como h se anula en c, existe un disco $B(0,r)$ contenido en $h(B)$. Si definimos $U = h^{-1}(B(0,r))$, $u = r^{-1}h$, $V = B(f(c), r^n)$ y $v : \mathbb{E} \longrightarrow V$ tal que $v(z) = r^n z + f(c)$, el entorno U y las funciones u y v tienen las propiedades deseadas. ◂

Referencias

[1] Reinhold Remmert, *Theory of Complex Functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 122, Springer Science+Media, LLC, 1991.

[2] G. Pólya and G. Szegő, *Problems and theorems in analysis. Vol. I: Series, integral calculus, theory of functions*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972. Translated from the German by D. Aeppli; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 193. MR0344042