Análisis Complejo

Pedro Tamaroff

Índice general

Nota al lector

Completar.

Capítulo I

Números complejos y funciones complejas

It shall be possible in every case to form the product of two right lines from one of its factors in the same manner as the other factor is formed from the positive or absolute line set equal to unity. That is:

Firstly, the factor shall have such a direction that they both can be placed in the same plane with the positive unit.

Secondly, as regards length, the product shall be to one factor as the other factor is to the unit. And,

Finally, if we give the positive unit, the factors, and the product a common origin, the product shall, as regards its direction, lie in the plane of the unit and the factors and diverge from the one factor as many degrees, and on the same side, as the other factor diverges from the unit, so that the direction of the angle of the product, or its divergence from the positive unit, becomes equal to the sum of the directin angles of the factors.

Caspar Wessel (1745–1818) en [19].

1. Conceptos básicos

1.1. El cuerpo de números complejos

Definimos sobre el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ un producto, de forma que para cada par $(x,y),(x',y')$ de vectores en $\mathbb{R}^2$,

$$(x,y)(x',y') = (xx' - yy', xy' + x'y) \tag{I.1}$$

La función $x \in \mathbb{R} \longrightarrow (x,0) \in \mathbb{R}^2$ identifica a $\mathbb{R}$ con un subespacio de $\mathbb{R}^2$, y escribiremos x al vector $(x,0) \in \mathbb{R}^2$ en lo que sigue. En particular $1 = (1,0)$ es la unidad para la multiplicación (I.1). Si definimos $i = (0,1)$ resulta que $i^2 = -1$, y que todo vector en $\mathbb{R}^2$ se escribe de forma única como $x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.1. *Con la suma usual y el producto* (I.1)*, el* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$ *es un cuerpo.*

Notamos por $\mathbb{C}$ al cuerpo $(\mathbb{R}^2,+,\cdot,1)$ y lo llamamos el ***cuerpo de los números complejos***. Un elemento de $\mathbb{C}$ se llama un ***número complejo***, que solemos notar genéricamente por z.

Demostración. Por su definición, está claro que el producto que definimos en $\mathbb{C}$ es $\mathbb{R}$-bilineal, es además conmutativo porque el producto en $\mathbb{R}$ lo es, es una verificación directa ver que este producto es también asociativo, y ya vimos que 1 es la unidad multiplicativa. Resta ver que todo número complejo no nulo admite un inverso multiplicativo. Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$ no nulo, el lector debe verificar que

$$z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

es el número complejo buscado. ◀

Dado un número complejo $z = x + iy \in C$, la ***norma de*** z es el número real no negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$ que notamos $|z|$, y no es otra cosa que la norma usual del vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. El ***número complejo conjugado de*** z es el número complejo $x - iy$ que notamos $\overline{z}$. Parte de la demostración anterior afirma entonces que si $z \neq 0$,

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

es el inverso multiplicativo de z. Decimos que x es la ***parte real de*** z y escribimos $\Re z = x$, y decimos que y es la ***parte imaginaria de*** z y escribimos $\Im z = y$. El $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ está munido de un producto interno usual que se transporta a $\mathbb{C}$. Dado otro número complejo $w = x' + iy'$, una verificación inmediata prueba que $\langle z, w\rangle = \Re(z\overline{w})$.

El conjunto $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo con la métrica entre vectores $z, w \in \mathbb{C}$ dada por

$$d(z, w) = |z - w|,$$

que llamamos la ***métrica usual***. Además, vale que el producto $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua, pues para cada $z, w \in C$ vale que $|zw| = |z||w|$. Por otro lado, la conjugación $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de cuerpos, pues $\bar{1} = 1$ y $\bar{0} = 0$ y, dados $z, w \in \mathbb{C}$, vale que

$$\overline{z}\,\overline{w} = \overline{zw} \qquad \text{y} \qquad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w},$$

que además fija puntualmente a $\mathbb{R}$. El lector debería verificar la validez de las siguiente propiedades para $z, w \in \mathbb{C}$; la primera de ellas extiende nuestra última afirmación.

(1) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

(2) $\Re z = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$

(3) $\Im z = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$

(4) $\overline{\overline{z}} = z$

(5) $\langle z, w\rangle = \langle \overline{z}, \overline{w}\rangle$

(6) $\langle z, w\rangle^2 + \langle iz, w\rangle^2 = |z|^2|w|^2$

(7) $|\langle z, w\rangle| \leqslant |z||w|$

(8) $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\langle z, w\rangle + |w|^2$

1.2. Funciones con valores complejos

Sea X un espacio métrico. Notamos por $\mathscr{C}(X)$ al conjunto de funciones continuas $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, y lo llamamos el ***espacio de funciones continuas sobre*** X. Un elemento de $\mathscr{C}(X)$ es una ***función compleja sobre*** X; cuando X este implícito por contexto, hablaremos simplemente de funciones complejas. Dadas dos funciones $f, g \in \mathscr{C}(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, quedan definidas funciones $f+g$, $f \cdot g$ y λf, también continuas, de modo que para $x \in X$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Llamamos a $f+g$ la ***suma de*** f ***y*** g, a $f \cdot g$ el ***producto de*** f ***y*** g y a λf el ***producto escalar de*** λ ***con*** f. Es inmediato que la suma y el producto por escalares asi definido le da a $\mathscr{C}(X)$ una estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Además, la asignación $\mathbb{C} \longrightarrow \mathscr{C}(X)$ que lleva $\lambda \in \mathbb{C}$ a la función con valor constante λ, que también notamos λ, identifica a $\mathbb{C}$ con un subespacio de $\mathscr{C}(X)$ de forma que el producto escalar de λ con f es el producto de la función constante λ con f. Más aún, el producto de $\mathscr{C}(X)$ es $\mathbb{C}$-bilineal y conmutativo, y tiene unidad la función constante 1, que le da a $\mathscr{C}(X)$ la estructura de una $\mathbb{C}$-álgebra conmutativa.

Fijemos una función compleja f sobre X. La ***parte real de*** f es la función $\Re f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Re f(x) = \Re(f(x))$ para cada $x \in X$, y la ***parte imaginaria de*** f es la función $\Im f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Im f(x) = \Im(f(x))$ para cada $x \in X$. De las definiciones deducimos que f queda unívocamente determinada por su parte real y su parte imaginaria, y es costumbre notarlas por u y v, respectivamente, asi tenemos la igualdad $f = u + iv$ en $\mathscr{C}(X)$. La ***función conjugada de*** f es la función $\overline{f} : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$ para cada $x \in X$, y el ***módulo de*** f es la función $|f| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f|(x) = |f(x)|$ para cada $x \in X$.

2. El plano complejo extendido

2.1. Proyección estereográfica

El $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{C}$ se identifica con subespacio de $\mathbb{R}^3$ via la función lineal $z = x + iy \in \mathbb{C} \longmapsto (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$. Notamos por N al polo norte $(0,0,1)$ de la esfera unidad S^2 en $\mathbb{R}^3$ y definimos la ***proyección estereográfica desde*** N como la función

$$\begin{aligned} \pi : S^2 \smallsetminus N &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y,u) &\longmapsto \frac{x+iy}{1-u} \end{aligned}$$

Proposición 2.1. *La proyección estereográfica desde N es un homeomorfismo y su inversa está dada por*

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 \smallsetminus N \\ z &\longmapsto \left(\frac{2\Re z}{1+|z|^2}, \frac{2\Im z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right). \end{aligned}$$

Notemos que para $v \in S^2 \smallsetminus N$ el punto $\pi(v)$ no es otra cosa que la intersección de la recta que pasa por v y N con $\mathbb{C}$.

Demostración. Por construcción tanto π como θ son funciones continuas, donde S^2 está munida de la métrica usual entre puntos de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{C}$ con la métrica usal entre puntos de $\mathbb{R}^2$. Dejamos al lector la verificación de que son inversas una de la otra. ◀

La proposición anterior le da a $\mathbb{C}$ una nueva métrica $\widehat{d}$, conocida como la ***métrica cordal***, inducida por la métrica de S^2 tal que

$$\widehat{d}(z,w) = \frac{2|z-w|}{((1+|z|^2)(1+|w|^2))^{1/2}},$$

y prueba que los abiertos de esta métrica coinciden con los abiertos de la métrica usual.

2.2. El punto en el infinito

Escribimos ∞ a un elemento fuera de $\mathbb{C}$, que llamamos el ***punto en el infinito***, y notamos por $\mathbb{C}^*$ al conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Extendemos la definición de las funciones π y θ de forma que

$$\pi(0,0,1) = \infty \qquad \text{y} \qquad \theta(\infty) = (0,0,1).$$

Definimos una base de entornos abiertos de ∞ en $\mathbb{C}^*$ por el conjunto de anillos infinitos

$$A(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}$$

para $r > 0$ de modo que una sucesión $(z_n) \in \mathbb{C}^*$ tiende a ∞ si y solamente si, para todo $r > 0$ está eventualmente en $A(r)$. Notemos que, con esta extensión de π y θ, obtenemos para $z \in \mathbb{C}$ que

$$\widehat{d}(z,\infty) = \frac{2}{(1+|z|^2)^{1/2}}$$

por lo que según nuestra definición anterior, $(z_n) \in \mathbb{C}$ converge a ∞ si y solamente si $\widehat{d}(z_n,\infty) \to 0$. Notemos, además, que si (v_n) es una sucesión en S^2 que converge a $(0,0,1)$, su imagen en $\mathbb{C}^*$ converge a ∞. Recíprocamente, si (z_n) es una sucesión en $\mathbb{C}^*$ que converge a ∞, su imagen en S^2 converge a N. Está clara ahora la validez de la siguiente proposición.

Proposición 2.2. *Las funciones extendidas*

$$\pi : S^2 \longrightarrow \mathbb{C}^*, \qquad \theta : \mathbb{C}^* \longrightarrow S^2$$

son homeomorfismos inversos.

Esto prueba que $\mathbb{C}^*$ es un espacio métrico compacto, en particular completo, y que contiene a $\mathbb{C}$ como un subespacio abierto denso. Recordemos que en este caso el espacio métrico $\mathbb{C}^*$ se llama la compactificación por un punto de $\mathbb{C}$ o compactifiación de Alexandroff de $\mathbb{C}$, y la propiedad anterior lo caracteriza unívocamente. Es usual llamar al espacio métrico $\mathbb{C}^*$ la ***esfera de Riemann***.

Proposición 2.3. *La proyección estereográfica desde N lleva círculos en la esfera a círculos o líneas en el plano complejo, y recíprocamente.*

Demostración. Consideremos primero un círculo en la esfera, que se obtiene intersecándola con un plano Π de ecuación

$$Ax + By + Cu = D.$$

Usando ahora coordenadas $z = x + iy$ en $\mathbb{C}$ con θ, obtenemos la ecuación

$$(C-D)(x^2+y^2)+2Ax+2By+D-C=0,$$

que es una recta si $C = D$ y es un círculo en otro caso. Recíprocamente, volviendo sobre nuestros pasos obtenemos que toda línea o círculo en el plano complejo es la imagen de un círculo en la esfera. Además, el plano Π pasa por N si y solamente si $C = D$, que prueba que las rectan se obtienen de los círculos que pasan por el polo norte, y que los círculos se obtienen de los restantes. ◀

Ejercicio 2.1. Dado un plano arbitrario como el de la demostración, ¿cuáles son condiciones necesarias y suficientes sobre A, B, C y D para asegurarse que su intersección con la esfera es un círculo?

La función continua $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $z \longmapsto z^{-1}$ si $z \neq 0, \infty$ y tal que $0 \longmapsto \infty$ e $\infty \longmapsto 0$ nos permitirá transportar definiciones usuales en $\mathbb{C}$ a definiciones en un entorno de ∞, como veremos más adelante.

Extendemos parcialmente las operaciones de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}^*$ de forma que $z + \infty = z - \infty = \infty$ para todo complejo $z \in \mathbb{C}$. Definimos también para $z \neq 0$, $z \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$. Finalemente, ponemos $z/\infty = 0$, $\infty/z = \infty$, y $z/0 = \infty$, en este último caso asumimos que $z \neq 0$.

3. Derivadas complejas

3.1. Definición y propidades elementales

Fijemos un conjunto abierto Ω de $\mathbb{C}$, una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y un punto $c \in \Omega$. Decimos que f es ***derivable en*** c si existe una función $f_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, continua en c, tal que

$$f(z) = f(c) + f_1(z)(z-c).$$

En tal caso notamos $f'(c)$ al número $f_1(c)$ y lo llamamos la ***derivada de** f **en** c*. Esta condición equivale a que exista el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \tag{I.2}$$

que en tal caso es igual a $f_1(c)$. De la definición deducimos que si f es derivable en c, es continua allí.

Todas las reglas usuales de cálculo para derivadas reales valen para las derivadas de funciones complejas, y la demostración de su validez es idéntica a la que damos en el caso real, por lo que la que la omitimos.

Proposición 3.1. *Sea $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ otra función, y supongamos que f y g son ambas derivables en $c \in \Omega$.*

(1) $\mathbb{C}$-linealidad. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces $f + \lambda g$ es derivable en c y*

$$(f+\lambda g)'(c) = f'(c) + \lambda g'(c).$$

(2) Regla de Leibniz. *El producto fg es derivable en c y*

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

(3) Cocientes. *Si $g(c) \neq 0$, el cociente f/g es derivable en c y*

$$(f/g)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}.$$

(4) Regla de la cadena. *Si $h : \Omega_1 \longrightarrow \Omega$ es derivable en c_1 y $h(c_1) = c$, entonces $g \circ h$ es derivable en c, y*

$$(g\circ h)'(c) = g'(c)\cdot h'(c_1).$$

Como ejercicio, el lector puede verificar que todo polinomio complejo es derivable en cualquier punto de $\mathbb{C}$, y que su derivada compleja se calcula de la misma manera que en el caso real. Así, por ejemplo, la derivada de z^2 es $2z$.

Decimos que f es ***holomorfa en*** c si es derivable en un entorno abierto de c, y que es ***holomorfa en*** Ω si es holomorfa en cada punto de Ω. Por definición resulta que el conjunto de puntos de Ω donde f es holomorfa es un conjunto abierto. Una función holomorfa en $\mathbb{C}$ se dice ***entera***.

3.2. Relación con la derivabilidad real

Dado que f es una función de un abierto de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, tiene sentido considerar la derivabilidad real de f tanto como su derivabilidad como fue definida en la sección anterior. Escribimos, como antes, $u = \Re f$ y $v = \Im f$.

Recordemos que f es $\mathbb{R}$***-diferenciable en*** c si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, que llamamos la ***derivada total de*** f ***en*** c y notamos $Df(c)$, tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(c+h) - f(c) - Df(c)(h)|}{|h|} = 0.$$

Recordemos, también, que si esto vale tanto u como v admiten derivadas parciales en c, y que la matriz de $Df(c)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ está dada por

$$D_f(c) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(c) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(c) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(c) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(c) \end{pmatrix}.$$

La relación entre la derivabilidad y la $\mathbb{R}$-diferenciabilidad de f es el contenido de la siguiente proposición.

Proposición 3.2. *Son equivalentes*

(1) f es derivable en c,

(2) f es $\mathbb{R}$-diferenciable en c y vale que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(c) = \frac{\partial v}{\partial y}(c) \qquad y \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(c) = -\frac{\partial v}{\partial x}(c), \tag{I.3}$$

(3) f es $\mathbb{R}$-diferenciable en c y la derivada total de f en c es $\mathbb{C}$-lineal.

En tal caso, $f'(c) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(c) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(c) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(c) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(c).$

Llamamos al par de ecuaciones (I.3) las ***ecuaciones de Cauchy–Riemann*** para f en c.

Demostración. Supongamos que vale (1). En primer lugar, la función f es $\mathbb{R}$-diferenciable en c: en efecto, la multiplicación por el escalar $f'(c)$ es una transformación $\mathbb{C}$-lineal y luego $\mathbb{R}$-lineal, y si la notamos $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, sabemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - T(h)}{h} = 0.$$

En el límite (I.2) podemos considerar el caso en que h se aproxima a cero por la recta real o por la recta imaginaria. Si $c = a + bi$, en el primero de los casos, tal límite es igual a

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(a+t,b) - u(a,b)}{t} + i \frac{v(a+t,b) - v(a,b)}{t}$$

y en el segundo es igual a

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(a,b+t) - u(a,b)}{it} + \frac{v(a,b+t) - v(a,b)}{t}.$$

Esto prueba, primero, que existen las derivadas parciales que aparecen en (I.3) y segundo, que tales ecuaciones valen, por lo que (1) $\implies$ (2). Supongamos que tales ecuaciones valen y que f es $\mathbb{R}$-diferenciable en c. La transformación lineal $Df(c)$ es tal que

$$Df(c)(1) = \frac{\partial u}{\partial x}(c) + i \frac{\partial u}{\partial y}(c), \qquad Df(c)(i) = \frac{\partial v}{\partial x}(c) + i \frac{\partial v}{\partial y}(c),$$

y es $\mathbb{C}$-lineal si y solamente si $iDf(c)(1) = Df(c)(i)$, que no es otra cosa que una reescritura de las ecuaciones (I.3). En este caso, $Df(c)$ es la transformación $\mathbb{C}$-lineal dada por la multiplicación por $\lambda = Df(c)(1)$, y la condición de $\mathbb{R}$-derivabilidad dice que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(c+h) - f(c) - \lambda h|}{|h|} = 0 \qquad \text{esto es, que} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lambda.$$

Concluímos que f es derivable en c y que $f'(c) = Df(c)(1)$, que, junto con las ecuaciones de Cauchy-Riemann, dan la última afirmación de la proposición. ◂

Una transformación lineal $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ se $\mathbb{C}$-***antilineal*** si la transformación lineal $z \longmapsto T(\bar{z})$ es $\mathbb{C}$-lineal. El siguiente lema nos permitirá dar una escritura general y conveniente de la derivada total de f en c en términos de sus derivadas parciales, y también obtener una reescritura muy compacta de las ecuaciones de Cauchy–Riemann.

Lema 3.3. *Sea $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una transformación $\mathbb{R}$-lineal. Existen únicos escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tal que*

$$T(z) = \mu z + \lambda \overline{z}.$$

Además, T es $\mathbb{C}$-lineal si y solamente si $\lambda = 0$, y es $\mathbb{C}$-antilineal si y solamente si $\mu = 0$. En el primer caso T es la multiplicación por $T(1)$, y en el segundo caso T es la conjugación seguido de la multiplicación por $T(1)$.

Demostración. Dado $z = x + iy$, la $\mathbb{R}$-linealidad de T garantiza que

$$\begin{aligned}
T(z) &= xT(1) + yT(i) \\
&= \frac{z+\bar{z}}{2}T(1) + \frac{z-\bar{z}}{2i}T(i) \\
&= \frac{1}{2}(T(1) - iT(i))z + \frac{1}{2}(T(1) + iT(i))\bar{z} \\
&= \mu z + \lambda \bar{z}.
\end{aligned}$$

Esto prueba la existencia y la unicidad de tales escalares, pues se obtienen de los valores $T(1)$ y $T(i)$, que determinan y están determinados unívocamente por T. Además $\mu = 0$ si y sólo si $-iT(1) = T(i)$, y en este caso $\lambda = T(1)$, y $\lambda = 0$ si y sólo si $iT(1) = T(i)$, y en este caso $\mu = T(1)$, que da la segunda parte del lema. ◂

Definimos la ***derivada de f respecto de x en c*** y la ***derivada de f respecto de y en c*** por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c) = \frac{\partial u}{\partial x}(c) + i\frac{\partial v}{\partial x}(c) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(c) = \frac{\partial u}{\partial y}(c) + i\frac{\partial v}{\partial y}(c),$$

respectivamente. Notemos que no son otra cosa que $Df(c)(1)$ y $Df(c)(i)$, así aplicando el lema a la función lineal $Df(c)$, obtenemos que para todo $z \in \mathbb{C}$ vale la igualdad

$$Df(c)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(c)z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c)\overline{z}$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial z}(c) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c) + i\frac{\partial f}{\partial y}(c)\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c) - i\frac{\partial f}{\partial y}(c)\right)$$

son los escalares μ y λ del lema, respectivamente. Los llamamos la ***derivada de*** f ***respecto de*** z ***en*** c y la ***derivada de*** f ***respecto de*** $\bar{z}$ ***en*** c. Con esta notación, una reformulación de la Proposición 3.2 es la siguiente.

Proposición 3.4. *f es derivable en c si y solamente si es $\mathbb{R}$-diferenciable y* $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c) = 0$.

Llamamos a $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ los ***operadores de Wirtinger***. Un cálculo muestra que ambos son $\mathbb{C}$-lineales y verifican la regla de Leibniz, y que además

$$\frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Esto permite el cálculo de derivadas parciales de funciones de forma más efectiva que usando el cociente (I.2). Por ejemplo, si $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c) = c\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}}(c) = c,$$

así f es derivable sólo en $c = 0$. En ese caso, como $\dfrac{\partial f}{\partial z}(c) = \bar{c}$, $f'(0) = 0$.

3.3. Funciones conformes

Una transformación lineal inyectiva $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ***preserva ángulos*** si para cada par de números complejos no nulos $z, w \in \mathbb{C}$, vale que

$$\left\langle \frac{Tz}{|Tz|}, \frac{Tw}{|Tw|} \right\rangle = \left\langle \frac{z}{|z|}, \frac{w}{|w|} \right\rangle.$$

Diremos que T ***preserva la orientación*** si la matriz de T en la base canónica tiene determinante positivo, y que T ***invierte la orientación*** si esta matriz tiene determinante negativo.

Lema 3.5. *Una transformación lineal inyectiva preserva ángulos si y solamente si es $\mathbb{C}$ lineal o $\mathbb{C}$-antilineal, y en el primero de los casos preserva la orientación, mientras que en el segundo la invierte.*

Demostración. Sea $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ inyectiva, y supongamos primero que preserva ángulos. Como 1 e i son ortogonales, los números $T(1) = x + iy$, $T(i) = x' + iy'$ son también ortogonales, y lo mismo es cierto para $T(1-i)$ y $T(1+i)$. La primera condición implica que $T(1)$ es un múltiplo escalar de $iT(i) = -y' + ix'$, y de la segunda obtenemos que $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$, asi $T(1)$ y $T(i)$ tienen la misma norma. Resulta entonces que $T(1) = iT(i)$ o que $T(1) = -iT(i)$: en el primer caso T es $\mathbb{C}$-antilineal, y en el segundo es $\mathbb{C}$-lineal. Notemos, además, que en el primer caso el determinante de T es $-|T(1)|^2$, y en el segundo caso es $|T(1)|^2$.

Si, por otro lado, T es $\mathbb{C}$-lineal o $\mathbb{C}$-antilineal, sabemos que $z \longmapsto T(z)$ o $z \longmapsto T(\bar{z})$ es la multiplicación por $T(1) \in C$. Es inmediato verificar ahora que T preserva ángulos y, nuevamente, que su determinante es $|T(1)|^2$ en el primer caso, en el que preserva la orientación, y en el segundo caso es $-|T(1)|^2$, en el que la invierte. ◂

Una transformación lineal $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que preserva los ángulos y la orientación se llama una ***transformación lineal conforme***. Decimos que f es ***conforme en*** c si su derivada total en c es una transformación lineal conforme.

Proposición 3.6. *La función f es conforme en c si y solamente si es derivable en c y $f'(c) \neq 0$.*

Demostración. Si f es conforme en c, entonces $Df(c)$ es $\mathbb{C}$-lineal, por lo que f es derivable en c. Como $Df(c)$ es inyectiva, es un isomorfismo, y su determinante, que es $|f'(c)|^2$, es no nulo. Si, por otro lado, f es derivable en c y $f'(c) \neq 0$, deducimos que $Df(c)$, que es $\mathbb{C}$-lineal, es un isomorfismo. Luego es inyectiva, y ya vimos que preserva ángulos. ◂

Si $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \Omega$ son curvas diferenciables que se intersecan en c, definimos el ***ángulo entre*** γ_1 ***y*** γ_2 ***en*** c como el ángulo entre $\gamma_1'(c)$ y $\gamma_2'(c)$. Notemos por $f_*\gamma_1$ y $f_*\gamma_2$ a las curvas obtenidas al postcomponer a γ_1 y γ_2 con f. El resultado anterior y la regla de la cadena prueban el siguiente resultado.

Corolario 3.7. *Si f es conforme en c, el ángulo entre γ_1 y γ_2 y el ángulo entre $f_*\gamma_1$ y $f_*\gamma_2$ en c coinciden.*

4. Funciones en $\mathbb{C}^*$

4.1. Funciones continuas en el infinito

Consideramos ahora el espacio de funciones continuas $\mathscr{C}(\mathbb{C}^*)$. Dado que $\mathbb{C}$ es un subconjunto abierto y denso de $\mathbb{C}^*$, tenemos una función de restricción

$$r : \mathscr{C}(\mathbb{C}^*) \longrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{C})$$

que es inyectiva. Veamos cual es su imagen.

Proposición 4.1. *Una función continua $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es la restricción de una función continua en $\mathbb{C}^*$ si y solamente si existe y es finito $L = \lim_{z\to\infty} f(z)$. En tal caso, la extensión F de f a $\mathbb{C}^*$ es tal que*

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \textit{si } z \in \mathbb{C}, \\ L & \textit{si } z = \infty. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que f es la restricción de una función definida en todo $\mathbb{C}^*$. Como $F(\infty) \in \mathbb{C}$ y como F es continua en ∞, resulta que $\lim_{z\to\infty} f(z) = F(\infty)$, que prueba que L existe y es igual a $F(\infty)$.

Recíprocamente, si existe tal límite, la definición de F que hicimos en el enunciado del teorema pone en evidencia que F es continua en ∞. Como f es continua en $\mathbb{C}$, esta extensión es continua en todo $\mathbb{C}^*$, como queríamos. ◀

Dada una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donde Ω contiene un entorno perforado de ∞ en

$\mathbb{C}$, será usual más adelante que usemos la notación $f(\infty)$ para $\lim_{z\to\infty} f(z)$, siempre que este límite exista (posiblemente en $\mathbb{C}^*$). El lector debería poder probar las siguientes proposiciones, cuyas demostraciones son similares a la de la última proposición.

Proposición 4.2. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $c \in \Omega$ y $f : \Omega \smallsetminus c \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. Si $\lim_{z\to c} f(z) = \infty$, existe una única extensión de f a una función continua $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $F(c) = \infty$.*

Proposición 4.3. *Sea Ω^* un abierto en $\mathbb{C}^*$ que contiene a ∞ y sea Ω el abierto de $\mathbb{C}$ correspondiente. La función de restricción*

$$r : \mathscr{C}(\Omega^*) \longrightarrow \mathscr{C}(\Omega)$$

es inyectiva, y su imagen consiste de las funciónes f en $\mathscr{C}(\Omega)$ para las que existe y es finito $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

4.2. El cuerpo de funciones racionales en $\mathbb{C}^*$

El espacio de funciones continuas $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ no se presta a una descripción simple como el caso del espacio $\mathscr{C}(\mathbb{C}^*)$. Contiene, sin embargo, un subespacio de funciones que será suficientemente útil para nuestros fines. Veremos más adelante resultados teóricos que harán más concreta esta afirmación.

Una ***función racional*** es un cociente $f(X) = p(X)/q(X)$ de polinomios $p, q \in \mathbb{C}[X]$, donde q es no nulo y $(p,q) = 1$. Toda función racional f define una función continua $\mathbb{C} \smallsetminus Z \longrightarrow \mathbb{C}$, que tambien notamos por f, donde Z es el conjunto de raíces de q. Aunque lo demostraremos más adelante, asumimos conocido el hecho que, si q tiene grado d, existen $\lambda, \xi_1, \ldots, \xi_s \in \mathbb{C}$ con $s \leqslant d$ y naturales $m_1, \ldots, m_s$ tal que $\sum_{i=1}^s m_i = d$ de forma que $q(X) = \lambda(X-\xi_1)^{m_1} \ldots (X-\xi_s)^{m_s}$. Así $Z = \{\xi_1, \ldots, \xi_s\}$ y la función f está definida salvo en finitos puntos de $\mathbb{C}$. Sea μ el coeficiente principal de p.

Proposición 4.4. *Existe una única extensión de f a una función continua $F : \mathbb{C}^* \longrightarrow$*

$\mathbb{C}^*$ *tal que* $F(w) = \infty$ *para* $w \in Z$ *y tal que*

$$F(\infty) = \begin{cases} 0 & \textit{si} \deg p < \deg q \\ \mu\lambda^{-1} & \textit{si} \deg p = \deg q \\ \infty & \textit{si} \deg p > \deg q \end{cases}$$

Llamamos al conjunto de todas las funciones $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ obtenidas de esta manera el ***cuerpo de las funciones racionales*** y lo notamos $\mathbb{C}(z)$.

Demostración. Veamos primero que $\lim_{z\to s} f(z) = \infty$ para cada raíz ξ de q. Dado $s \in Z$ podemos escribir a f como $(z-\xi)^{-m}h(z)$ donde $h(z)$ es una función racional que no se anula en s y $m > 0$ es un número natural. Como h tiene límite finito cuando $z \to s$, es suficiente que probemos que $\lim_{z\to\xi}(z-\xi)^{-m} = \infty$ cuando $z \to \xi$, y esto es inmediato. Es igualmente de inmediato verificar que $F(\infty)$ es igual al límite de f en ∞, por lo que queda demostrada la proposición. ◀

El siguiente resultado justifica el nombre que le dimos al espacio $\mathbb{C}(z)$.

Proposición 4.5. *El conjunto* $\mathbb{C}(z)$ *es un cuerpo.*

Demostración. Sean $f(X)$ y $g(X)$ funciones racionales, y notemos por f y g a las funciones que definen en $\mathbb{C}^*$. Definimos la suma de la función $f+g$ como la función racional que define $f(X)+g(X)$, y el producto $f\cdot g$ como la función racional que define $f(X)g(X)$. El lector puede verificar que la función racional 1 es la identidad para el producto, que la función racional 0 es la unidad para la suma, y que estas dos operaciones hacen de $\mathbb{C}(z)$ un cuerpo, donde si $f(X)$ es una función racional no nula, su inversa multiplicativa está dada por la función racional que define $f(X)^{-1}$. ◀

4.3. Transformaciones de Möbius

Lema 4.6. *Si una función racional en* $\mathbb{C}^*$ *es inyectiva, está definida por el cociente de dos polinomios de grado a lo sumo* 1.

Demostración. Sea f una función racional en $\mathbb{C}^*$, y supongamos que está definida por $f(X) = p(X)/q(X)$. Si p tiene grado mayor a dos, entonces f se anula en dos puntos distintos, y luego no puede ser inyectiva. Análogamente, si q tiene grado mayor dos, entonces f toma el valor ∞ en dos puntos distintos. Asi p y q tienen ambos grado a lo sumo 1. ◂

Notemos que si $f = p/q$ es una función racional inyectiva, donde p y q son de grado a lo sumo 1, entonces

(1) Si p es constante entonces q es de grado 1, y viceversa.
(2) Si $p = az + b$ y $q = cz + d$ son ambos no constantes, no tienen raíz común, así pues $ad - bc \neq 0$.

Llamamos a una función racional biyectiva $T : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

una ***homografía*** o ***transformación de Möbius***, y escribimos $\mathrm{Mob}(\mathbb{C}^*)$ al conjunto de todas ellas. Por lo anterior, la condición que T sea biyectiva es equivalente a $ac - db \neq 0$ y, en este caso, su inversa es

$$T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}.$$

Las homografías forman un ***grupo*** con operación la composición usual de funciones, esto es:

(1) la composición de dos homografías es otra vez una homografía,
(2) la composición es asociativa,
(3) la composición tiene elementro neutro, la homografía identidad y,
(4) toda homografía tiene una inversa para la composición.

Notamos por $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ al conjunto de matrices complejas inversibles de 2×2, y lo llamamos el ***grupo general lineal***—como su nombre lo indica, es también un grupo, con operación el producto usual de matrices, y unidad la matriz identidad. Este grupo de matrices inversibles y el de homografías se relacionan mediante una función *sobreyectiva*

$$\Phi : \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Mob}(\mathbb{C}^*)$$
$$\Phi(A)(z) = \frac{A_{11}z + A_{12}}{A_{21}z + A_{22}}.$$

Si $\Phi(A) = T$, diremos que A ***representa a*** T. El lector puede verificar que para cada par de matrices $A, B \in \mathsf{GL}(2,\mathbb{C})$, vale que

(1) $\Phi(AB) = \Phi(A) \circ \Phi(B)$,

(2) $\Phi(\lambda 1) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$,

(3) $\Phi(A) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$ si y sólo si $A = \lambda 1$.

La seguna condición prueba que si nos restringimos al conjunto de matrices inversibles de 2×2 con determinante 1, que notamos $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ y llamamos el ***grupo lineal especial***, nuestra función Φ sigue siendo sobreyectiva: si T es una homografía y $\Phi(A) = T$, podemos tomar $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $\mu^2 = \det A$, y entonces $A' = \mu^{-1}A$ tiene determinante 1 y por (1) y (2), representa también a T. Además, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ es un ***subgrupo*** de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$: contiene a la identidad, y el producto de dos matrices con determinante 1 tiene, otra vez, determinante 1.

Si tomamos ahora $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ que representan a T, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda A = B$, y luego, tomando determinantes, resulta que $\lambda^2 = 1$, así $\lambda = 1$ o -1. Luego, el grupo de homografías $\mathrm{Mob}(\mathbb{C}^*)$ está en biyección con el conjunto de clases de equivalencia de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ para la relación $A \sim B \iff A = \pm B$, que se nota $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ y se llama el ***grupo projectivo lineal especial***. Nuevamente, como su nombre lo indica, es un grupo, y la operación está inducida por el producto de matrices: dadas dos clases $\{A, -A,\}$ y $\{B, -B\}$, su producto es la clase $\{AB, -AB\}$.

Una homografía de la forma $t_a(z) = z + a$ se dice una ***translación de dirección*** a, una de la forma $h_b(z) = bz$ con $b \in \mathbb{R}$ se dice una ***homotecia de factor*** b, una de la forma $r_\theta(z) = e^{i\theta}z$ es una ***rotación de ángulo*** θ, y $\iota(z) = z^{-1}$ es la ***inversión a través del círculo unidad***. Por simplicidad, hablaremos de translaciones, homotecias e inversiones, y permitiendo que b sea complejo en h_b para incluir a las rotaciones. Notemos que las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

representan a t_a, h_b e ι, respectivamente. El lector debería verificar que valen las siguientes relaciones entre estas homografías:

(1) $h_a \circ t_b = t_{ab} \circ h_a$,

(2) $h_a \circ \iota = \iota \circ h_{1/a}$,

La siguiente proposición muestra que estas tres transformaciones elementales son suficientes para obtener cualquier otra homografía.

Proposición 4.7. *Toda homografía es una composición de traslaciones, homotecias e inversiones. Más precisamente, sea T es una homografía:*

(1) Si $T(\infty) = \infty$, entonces $T = h_\lambda \circ t_\mu$ para ciertos $\lambda, \mu \in C$, y esta escritura es única.

(2) Si $T(\infty) = \lambda \in \mathbb{C}$, entonces $T = t_\lambda \circ h_\mu \circ \iota \circ t_\tau$ para ciertos $\mu, \tau \in \mathbb{C}$, y esta escritura es única.

Demostración. Supongamos que T está representada por $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ con $\det A = 1$. Entonces T fija a ∞ exactamente cuando $c = 0$ y, en ese caso, $T = h_\lambda \circ t_\mu$ dónde $\lambda = T(1) - T(0)$ y $\mu = T(0)$. Si, por otro lado, $c \neq 0$, como $\det A = 1$ podemos escribir

$$T(z) = -\frac{1}{c^2}\frac{1}{z + dc^{-1}} + \frac{a}{c},$$

que da una escritura de T como composición de translaciones, una inversión y una homotecia, como dijimos, donde $\lambda = \dfrac{a}{c}$. Para ver la unicidad, supongamos que tenemos una igualdad

$$t_\lambda \circ h_\mu \circ \iota \circ t_\tau = t_{\lambda'} \circ h_{\mu'} \circ \iota \circ t_{\tau'}.$$

Por la última observación $\lambda = \lambda' = T(\infty)$, por lo que

$$\iota \circ h_{1/\mu} \circ t_\tau = \iota \circ h_{1/\mu'} \iota \circ t_{\tau'}.$$

por la relación (2) antes de la proposición. Cancelando ι, resulta que

$$h_{\mu'/\mu} = t_{\tau'-\tau}.$$

Como $h_{\mu'/\mu}(0) = 0$, $t_{\tau'-\tau}$ es una traslación que fija el origen, así $\tau = \tau'$, y luego $\mu = \mu'$. ◀

Lo anterior prueba que toda homografía depende solo de tres parámetros, la siguiente proposición nos da otra forma, un poco más útil, de entender este fenómeno.

Proposición 4.8. *Sean z_1, z_2 y z_3 puntos distintos en $\mathbb{C}^*$. Existe una única homografía $T : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tal que*

$$T(z_1) = 0, \qquad T(z_2) = 1, \qquad T(z_3) = \infty, \qquad \textit{a saber,}$$

$$T(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

En particular, para cada par de triples (z_1, z_2, z_3) y (w_1, w_2, w_3) de números distintos en $\mathbb{C}^*$, existe una única homografía T tal que

$$T(z_1) = w_1, \qquad T(z_2) = w_2, \qquad T(z_3) = w_3,$$

y se obtiene al despejar w de la igualdad

$$\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} = \frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} \tag{I.4}$$

Notemos que en el caso que alguno de z_1, z_2 o z_3 es ∞, tenemos que transformar a T en forma acorde. Por ejemplo, si $z_3 = \infty$,

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Demostración. No hay más que hace que evaluar a T en los puntos dados para verificar que cumple la condición pedida. Si S es otra homografía que cumple esas condiciones, $R = TS^{-1}$ es una homografía que fija $0, 1$ e ∞. Como $R(\infty) = \infty$, R es una homotecia seguida de una traslación, y como R fija el origen y al 1, R debe ser la identidad. ◀

4.4. Razón doble e inversión

Dada una 4-upla (z, z_1, z_2, z_3) de números distintos en $\mathbb{C}^*$, definimos la razón doble $(z, z_1; z_2, z_3)$ usando el lado izquierdo de (I.4). Deducimos inmediatamente parte de la siguiente proposición.

Proposición 4.9. *Toda transformación de Möbius preservas las razones dobles. Recíprocamente, toda transformación de la esfera a si misma que preserva las razones dobles es una transformación de Möbius.*

Demostración. Sea $T : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ una transformación de Möbius y tomemos cuatro puntos distintos z, z_1, z_2, z_3 en $\mathbb{C}^*$. Sabemos entonces que T queda determinada despejando w de (I.4), y esto prueba que $(z, z_1; z_2, z_3) = (Tz, Tz_1; Tz_2, Tz_3)$. Recíprocamente, si $T : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es una transformación que preserva razones dobles sea $w_1 = T(0)$, $w_2 = T(1)$ y $w_3 = T(\infty)$. Si $z \notin \{0, 1, \infty\}$ entonces $z = (z, 0; 1, \infty) = (T(z), w_1; w_2, w_3)$ que permite despejar $T(z)$ como la inversa de una transformación de Möbius. ◀

Ya sabemos que toda transformación de Möbius es una composición de traslaciones, homotecias e inversiones. Es inmediato que las dos primeras llevan círculos a círculos y rectas a rectas. Para probar la siguiente proposición, es suficiente que veamos que la inversión lleva círculos y rectas a círculos o rectas.

Proposición 4.10. *Las transformaciones de Möbius llevan círculos y rectas a círculos o rectas.*

Si consideramos a las transformaciones de Möbius como automorfismos de S^2, la proposición dice que llevan círculos a círculos, donde las rectas quedan representadas por los círculos que pasan por el polo norte.

Demostración. Como dijimos, es suficiente que probemos que la inversión lleva círculos y rectas a círculos o rectas. La ecuación general de un circulo o una recta en $\mathbb{C}$ está dada por

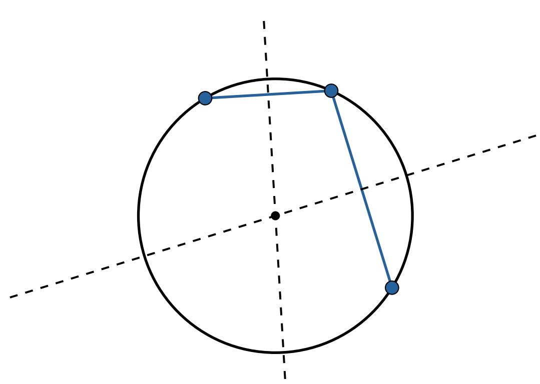
$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0,$$

donde $A=0$ o $A\neq 0$ acorde a si nuestro conjunto es una recta o un círculo, respectivamente. Si dividimos la ecuación anterior por x^2+y^2 y pasamos a las coordenadas dadas por $z^{-1}=(x',y')$, obtenemos la ecuación

$$A+Bx'-Cy'+D(x'^2+y'^2)=0,$$

que es otra vez la de un círculo o una recta. De hecho, esto prueba que la imagen de círculo que pasa por el origen bajo la inversión es una recta que pasa por el origen, y que la imagen de un círculo que no pasa por el origen es otro círculo. Prueba, además, que la imagen de una recta que pasa por el origen es otra recta que pasa por el origen, y que la imagen de una recta que no pasa por el origen es un círculo que pasa por el origen. ◀

Tomemos tres puntos distintos z_1, z_2, z_3 en $\mathbb{C}$ que no son colineales. En tal caso, existe un único círculo C que pasa por esos puntos, como ilustramos en la figura siguiente.



Proposición 4.11. *Con la notación anterior, un cuarto punto $z\in\mathbb{C}$ está sobre C si*

y solamente si la razón doble $(z, z_1; z_2, z_3)$ *es un número real.*

Demostración. En efecto, sea T una transformación de Möbius que lleva (z_1, z_2, z_3) a $(0, 1, \infty)$ y sea $w = Tz$. Sabemos que $T(C)$ es entonces un círculo o una recta, y como contiene a $0, 1, \infty$ es necesariamente la recta real. Sabemos, además, que $(z, z_1; z_2, z_3) = w = (w, 0; 1, \infty)$, y ahora es evidente que w está en $\mathbb{R}$ si y solamente si la razón doble $(z, z_1; z_2, z_3)$ es real. Esto prueba lo que queremos. ◀

Completar. Inversiones.

5. Grupos de homografías

Consideremos ahora algunos subgrupos de $\mathrm{Mob}(\mathbb{C}^*)$. En primer lugar, las homografías que fijan a ∞ son exactamente aquellas que preservan al plano complejo, y luego son todas de la forma $T(z) = \lambda z + \mu$, y llamamos al grupo de estas transformaciones el ***grupo afín***, que notamos por $\mathrm{Aff}(1, \mathbb{C})$. Éste contiene como subgrupo al conjunto $E(\mathbb{C})$ de los ***movimientos Eulideos del plano***, es decir, aquellos que preservan la distancia entre dos puntos cualesquiera, y se obtienen de las $T \in \mathrm{Aff}(1, \mathbb{C})$ con $|\lambda| = 1$.

5.1. Rotaciones de la esfera

Completar.

5.2. El disco unidad y el semiplano positivo

Completar.

6. Funciones holomorfas en $\mathbb{C}^*$

Capítulo II

Series de potencias

One of the major results of the theory of complex variables is to reduce the study of certain functions, including most of the common functions you can think of (like exponentials, logs, sine, cosine) to power series, which can be approximated by polynomials. Thus the power function is in some sense the unique basic function out of which the others are constructed. For this reason it was essential to get a good intuition of the power function.

Serge Lang (1927–2005) en [10].

1. El álgebra de series de potencias

1.1. Series formales

Una ***serie de potencias formal*** con coeficientes complejos es una expresión $f = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ donde (a_n) es una sucesión en $\mathbb{C}$, y notamos por $\mathbb{C}[\![X]\!]$ al conjunto de series de potencias formales con coeficientes complejos. Solemos decir que (a_n) es el ***término general*** de f —está claro que una serie formal está unívocamente determinada por su término general. Si $f = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ y $g = \sum_{n\geqslant 0} b_n X^n$ son series de potencias, llamamos a la serie con término general $(a_n + b_n)$ la ***suma de*** f ***y*** g y la notamos $f + g$. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, llamamos a la serie con término eneral (λa_ν) el ***producto escalar de*** λ ***con*** f, y lo notamos λf. Estas dos operaciones le dan a $\mathbb{C}[\![X]\!]$ una estructura de $\mathbb{C}$ espacio vectorial.

Las series de potencias formales pueden multiplicarse de forma completamente análoga a los polinomios: dadas dos series $f = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ y $g = \sum_{n\geqslant 0} b_n X^n$, definimos el ***producto de*** f ***con*** g como la serie con término general (c_n) donde

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0,$$

y lo notamos fg. Con las dos operaciones anteriores y esta multiplicación, que es conmutativa, $\mathbb{C}[\![X]\!]$ es una $\mathbb{C}$-***álgebra***, esto es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial munido de un producto $\mathbb{C}$-bilineal y asociativo, con unidad la serie con término general $a_0 = 1$ y $a_n = 0$ si $n > 0$. Además, el álgebra de polinomios $\mathbb{C}[X]$ es una subálgebra, pues el producto y la suma de dos polinomios es otra vez un polinomio. El siguiente lema prueba que toda serie formal cuyo coeficiente independiente es no nulo admite una inversa para el producto de series.

Lema 1.1. *Sea $f = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ una serie de potencias formal. Entonces existe una serie de potencias g tal que $fg = gf = 1$ si, y solamente si, $a_0 \neq 0$. En este caso, tal serie es única.*

Demostración. Supongamos primero que existe tal serie g, y que su primer término es b_0. De $fg = 1$ obtenemos que $a_0 b_0 = 1$, así $a_0 \neq 0$. Si, por otro lado, vale esta condición, podemos asumir que $a_0 = 1$. Escribamos a f como $f = 1 - \sum_{n\geqslant 0} f_n X^n$

donde $f_n = -a_n$ para cada $n > 0$. Si existe $g = \sum_{n\geqslant 0} b_n X^n$ que cumple la condición del lema, entonces la serie $fg = \sum_{n\geqslant 0} c_n X^n$ es tal que $c_0 = s_0 t_0 = 1$, así $t_0 = 1$, y $c_n = 0$ si $n > 0$. Escribiendo esto explícitamente, obtenemos que si $n > 0$,

$$b_n = f_1 b_{n-1} + \cdots + f_{n-1} b_1 + b_0,$$

que define inductivamente b_n en términos de b_j para $1 \leqslant j < n$. Esto prueba tanto la existencia como la unicidad de g. ◀

La serie g del lema se llama la ***inversa de*** f y la notamos f^{-1}, decimos en este caso que f es ***inversible***.

Corolario 1.2. *Toda serie de potencias formal no nula f admite una expresión única en la forma $f = z^m h$ donde h es una serie formal inversible y $m \geqslant 0$. Además, f es inversible si y solamente si $m = 0$.*

El número natural m se llama el ***orden de*** f y lo notamos $o(f)$. Por convención, el orden de la serie nula es ∞.

Demostración. Dado que f es no nula, existe un primer natural m tal que $a_m \neq 0$. En este caso z^m es un factor de f y si escribimos $f = z^m h$, el término independiente de la serie h es $a_m \neq 0$, así es inversible. La unicidad de m está clara, y esto da la de h. ◀

1.2. Radio de convergencia de una serie

En lo que sigue fijamos una serie de potencias $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Definimos el ***radio de convergencia*** de f como el supremo del conjunto $\{t \geqslant 0 : |a_n| t^n \text{ es acotada}\}$, y lo notamos R_f. Observemos que R_f puede tomar cualquier valor entre 0 e ∞. Veamos que este número es la elección apropiada de un “radio de convergencia”. Comenzamos con un lema preliminar.

Lema 1.3. *(Abel) Si existe una constante positiva s tal que la sucesión $(|a_n| s^n)$ se mantiene acotada, la serie f converge absolutamente en cualquier disco centrado en el origen y de radio menor a s.*

Demostración. Dado $0 < r < s$, sea $q = rs^{-1}$. Entonces $0 < q < 1$, y si M es una constante tal que $|a_n|s^n \leqslant M$ para todo $n \geqslant 0$, deducimos que

$$|a_n|r^n = |a_n|s^n q^n \leqslant Mq^n$$

para todo número natural n. Como la serie geométrica de parámetro q converge, lo mismo es cierto para la serie con término general $|a_n|r^n$, como queríamos. ◀

Del lema anterior, deducimos que si f converge para algún z_0 no nulo, converge en todo punto del disco $B(0,|z_0|)$. Además, ahora es claro el siguiente resultado, que afirma que $B(0,R_f)$ es el disco abierto más grande donde f converge. Lo llamamos el ***disco de convergencia*** de f.

Teorema 1.4. *La serie f converge absolutamente en $B(0,R_f)$ y diverge en todo punto fuera de $\overline{B}(0,R_f)$. Además, ${R_f}^{-1}$ es igual al límite superior de la sucesión $(|a_n|^{1/n})$.*

Demostración. La primera afirmación se sigue inmediatamente del lema, así que resta ver la validez de la segunda. Para esto, pongamos $S_f = \limsup_{n\to\infty}(|a_n|^{1/n})$ y veamos que $S_f^{-1} = R_f$.

Supongamos primero que R_f es infinito. Entonces para todo $t > 0$ la sucesión $\{|a_n|t^n\}$ se mantiene acotada. Ahora, si $M > 0$ es una constante, $M^{1/n} \to 1$, y de esto y lo anterior deducimos que $\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}t \leqslant 1$ para todo $t > 0$, y luego debe ser el caso que $S_f = 0$. Si, por otro lado, $R_f = 0$, entonces podemos construír una sucesión $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots$ de naturales tal que $|a_{n_j}| \geqslant j^{n_j}$ por lo que $\lim|a_{n_j}|^{1/n_j} \to \infty$, y luego $S_f = \infty$.

Podemos considerar ahora el caso que S_f es finito y positivo. Por lo anterior, lo mismo debe ser cierto para R_f. Supongamos que $t < S_f^{-1}$. Entonces existe un natural N tal que si $n \geqslant N$ tenemos $|a_n|^{1/n} \leqslant t^{-1}$, y luego la sucesión $(|a_n|t^n)$ se mantiene acotada. Así, $t \leqslant R_f$. Esto prueba que $S_f^{-1} \leqslant R_f$.

Supongamos, por otro lado, que $t > S_f^{-1}$ y tomemos $t > s > S_f^{-1}$. Entonces podemos construír una sucesión $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots$ de naturales tal que $|a_{n_j}| \geqslant s^{-n_j}$, y luego la sucesión $(|a_{n_j}|s^{n_j})$ está acotada inferiormente por 1. Si ahora $q = ts^{-1} > 1$, obtenemos que $|a_{n_j}|t^{n_j} \geqslant q^{n_j}$ para cada j. Resulta que la sucesión $(|a_n|t^n)$ no se mantiene acotada. Esto prueba que $S_f^{-1} \geqslant R_f$, y completa la demostración del teorema. ◀

La última afirmación del teorema anterior se debe a Cauchy y Hadamard. El cálculo de R_f se fácilita con el siguiente ***criterio del cociente de D'Alambert***. Dejamos su prueba al lector, con la indicación que intente imitar la demostración del teorema anterior.

Proposición 1.5. *Supongamos que la sucesión $(a_n)_{n\geqslant 0}$ es eventualmente no nula. Si existe $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$ entonces es igual a R_f. Más precisamente, vale que*

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant \liminf_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Para poner en uso el resultado anterior, fijemos un número complejo σ, y pongamos para todo natural n,

$$\binom{\sigma}{n} = \frac{\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-n+1)}{n(n-1)\cdots 1},$$

que llamamos un ***coeficiente binomial***. Un cálculo directo muestra que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{\sigma+1}{n} = \binom{\sigma}{n} + \binom{\sigma}{n-1}. \tag{II.1}$$

El lector debería dar una prueba de que esto implica y, de hecho, es equivalente, a la igualdad

$$(1+z)b_\sigma = b_{\sigma+1}$$

de series formales. Notemos que si σ es natural, entonces $\binom{\sigma}{n}$ coincide con el coeficiente binomial usual de la combinatoria.

Definimos la ***serie binomial de parámetro*** σ por

$$b_\sigma(z) = \sum_{n\geqslant 0}\binom{\sigma}{n} z^n.$$

Por lo anterior, si σ es natural entonces b_σ es un polinomio, a saber, $(1+z)^\sigma$. Si σ no es natural, es una serie infinita, pues $\binom{\sigma}{n}$ no se anula nunca en ese caso, que tambien notamos $(1+z)^\sigma$.

Proposición 1.6. *Si σ no es natural la serie b_σ tiene radio de convergencia* 1.

Demostración. Ya notamos que si σ no es natural la sucesión de coeficientes es nunca nula. Calculamos los cocientes sucesivos de b_σ:

$$\frac{\binom{\sigma}{n}}{\binom{\sigma}{n+1}} = \frac{n+1}{\sigma - n},$$

de dónde deducimos que $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}| = 1$. Por el criterio de D'Alambert, el radio de convergencia de b_σ es 1, como se dijo. ◀

1.3. El álgebra de series convergentes

Definimos el ***conjunto de series de potencias convergentes*** como el conjunto de series formales con radio de convergencia positivo y lo notamos por $\mathbb{C}\{X\}$. Dado que si f y g son series convergentes y si $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos que

(1) $R_{f+g} \geqslant \min\{R_f, R_g\}$,

(2) $R_{\lambda f} = R_f$ si $\lambda \neq 0$,

tal conjunto es un subespacio de $\mathbb{C}[\![X]\!]$. La siguiente descripción alternativa de $\mathbb{C}\{X\}$, interesante en si misma, será una herramienta útil en lo que sigue.

Proposición 1.7. *El conjunto $\mathbb{C}\{X\}$ coincide con*

$$\left\{ f = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n : |a_n| \leqslant s^n \text{ eventualmente para algún } s > 0 \right\}.$$

Así, las series de potencias convergentes son precisamente aquellas con coeficientes *subgeométricos.*

Demostración. Queda como ejercicio al lector con la sugerencia que use el lema de Abel, que ya demostramos. ◀

Proposición 1.8. *Sean f y g series de potencias convergentes. Entonces*

(1) *El producto formal fg es también una serie convergente.*
(2) *Si f tiene una inversa formal, esta inversa es, de hecho, una serie de potencias convergente.*

Demostración. Notemos que lo primero afirma que $\mathbb{C}\{X\}$ es una subálgebra de $\mathbb{C}[\![X]\!]$. Escribamos $f = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ y $g = \sum_{n\geqslant 0} b_n X^n$. Por la Proposición 1.7 podemos asumir que existe $s > 0$ tal que $\max\{|a_n|, |b_n|\} \leqslant s^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El término general del producto fg es $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$, así podemos hacer la estimación

$$|c_n| \leqslant \sum_{i=0}^n |a_i||b_{n-i}| \leqslant \sum_{i=0}^n s^i s^{n-i}| \leqslant (n+1)s^n \leqslant (2s)^n,$$

que prueba que fg está en $\mathbb{C}\{X\}$.

Supongamos ahora que $a_0 \neq 0$. Como antes, podemos asumir que a_0 es 1, y escribir $f = 1 - \sum_{n\geqslant 0} f_n X^n$. Por lo que ya hicimos, sabemos que el término general (b_n) de la inversa de f cumple que $b_0 = 1$ y la relación de recurrencia

$$b_n = f_1 b_{n-1} + \cdots + f_{n-1} b_1 + f_n.$$

En particular $b_1 = f_1 = -a_1$. Supongamos que $|a_n| \leqslant s^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si asumimos, inductivamente, que $|b_i| \leqslant (2s)^i$ para $0 \leqslant i < n$, obtenemos que

$$|b_n| \leqslant \sum_{i=1}^n |f_i||b_{n-i}| \leqslant \sum_{i=1}^n s^i 2^{n-i} s^{n-i} \leqslant (2s)^n$$

pues $\sum_{i=1}^n 2^{n-i} = 2^n - 1$. Resulta entonces que f^{-1} tiene también radio de convergencia positivo, como queríamos. ◀

Notemos que, en general, no hay relación entre el radio de f y su inversa. Por ejemplo, la serie geometrica tiene inversa $1 - X$, que tiene radio de convergencia infinito, mientras que ella tiene radio de convergencia 1. Por otro lado, la serie exponencial y su inversa tiene ambas radio de convergencia infinito.

Corolario 1.9. *Sea f una serie de potencias convergente no nula. Entonces se escribe de forma única como $f = z^{o(f)}h$ donde h es una serie de potencias convergente inversible.*

Demostración. Esto sólo es la versión del Corolario 1.2 en el caso que f pertenece a $\mathbb{C}\{X\}$. ◀

Ejercicio 1.1. Probar que si f y g son series de potencias no nulas con radio de convergencia positivo y si h es otra serie de potencias tal que $fh = g$, entonces h tiene radio de convergencia positivo. *Sugerencia:* ¿Por qué puede asumir que f es inversible?

El siguiente lema prueba que si una serie de potencias convergente se anula 0, existe un entorno del origen donde 0 es el único punto donde esto sucede.

Lema 1.10. *Sea h una serie de potencias no nula y convergente en entorno del origen B y supongamos que $h(0) = 0$. Entonces existe un entorno $B' \subseteq B$ tal que $h(z) \neq 0$ si $z \neq 0$.*

Demostración. Podemos escribir $h = z^{o(h)}k$ donde k es una serie de potencias convergente con $k(0) \neq 0$ y $o(h) > 0$. Como k es continua, existe un entorno B' del origen donde k no se anula, y luego h no se anula en B' salvo en el origen, como se dijo. ◀

Del lema anterior deducimos inmediatamente el siguiente teorema.

Teorema 1.11. (Unicidad de representación) *Sean f y g series de potencias convergentes. Son equivalentes*

(1) f y g coinciden en un conjunto infinito que tiene al origen como punto de acumulación,

(2) f y g tienen el mismo término general.

Demostración. Sea $h = f - g$. Si vale (1), entonces $h(z) = 0$ en un conjunto de puntos de B que se acumula en el origen, y luego por el lema anterior h no puede ser no nula, por lo que deducimos (2). Es trivial, por otra lado, que (2) $\implies$ (1). ◀

2. Operaciones sobre series

2.1. Derivación e integración de una serie

Escribamos f' a la serie de potencias que se obtiene de derivar formalmente cada término de la serie f, y F a la serie de potencias que se obtiene de integrar formalmente cada término de la serie f, así

$$f' = \sum_{n\geqslant 0} n a_n z^n, \qquad\qquad F = \sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1},$$

y las llamamos la ***derivada formal*** y la ***integral formal*** de la serie de potencias f, respectivamente.

Proposición 2.1. *El radio de convergencia de f' y el de F son iguales, y coinciden con el de f.*

Estamos probando, una vez más, que el álgebra $\mathbb{C}\{X\}$ es estable bajo operaciones usuales que hacemos sobre series formales, y luego que no hay realmente peligro en tratarlas como series formales, después de todo.

Demostración. Como $\lim\limits_{n\to\infty} n/(n+1) = 1$, la desigualdad de D'Alambert asegura que $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. Así que la igualdad $R_f = R_{f'}$ se sigue inmediatamente de la fórmula de Cauchy–Hadamard, mientras que $R_F = R_f$ porque $F' = f$. ◀

Ejercicio 2.1. Sea $t > 0$. Probar que $(|a_n|t^n)$ es acotada si $(n|a_n|t^{n-1})$ es acotada, y que si $0 < s < t$ y si $(|a_n|t^n)$ es acotada, entonces $(n|a_n|s^{n-1})$ es acotada, para dar una nueva demostración de la última proposición.

Como ejemplo, veamos que, al menos formalmente, $b'_\sigma = \sigma b_{\sigma-1}$. De la definición del coeficiente binomial, obtenemos que $\frac{n}{\sigma}\binom{\sigma}{n} = \binom{\sigma-1}{n-1}$, y entonces

$$b'_\sigma = \sum_{n\geqslant 1} n\binom{\sigma}{n} z^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1} \sigma\binom{\sigma-1}{n-1} z^{n-1} = \sigma b_{\sigma-1},$$

que prueba lo que queríamos.

Veamos ahora que f define una función holomorfa en su disco de convergencia $B = B(0, R_f)$.

Proposición 2.2. *La función $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y su derivada es la función que define f' en B, es decir, la serie de potencias que se obtiene derivando término a término a la serie f.*

Demostración. Fijemos un número complejo $w \in B$, y tomemos z en B, así existe $s < R_f$ tal que $|w|, |z| < s$. Recordemos que para cualquier natural n vale que

$$\frac{z^n - w^n}{z - w} = z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1},$$

y notemos a este polinomio $q_n(z)$, así en particular $q_0(z) = 0$ y $q_1(z) = 1$. Entonces resulta que

$$f(z) = f(w) + (z - w) \sum_{n \geqslant 1} a_n q_n(z).$$

Además, como $q_n(w) = nw^{n-1}$, al menos es cierto que $f'(w) = f_1(w)$ donde $f_1(z) = \sum_{n\geqslant 1} a_n q_n(z)$. Para ver que f es derivable en w y su derivada es $f'(w)$, es suficiente que verifiquemos que $f_1(z)$ es continua en B. Pero si $|z|, |w| < s$, podemos dar la cota $|q_n(z)| \leqslant ns^{n-1}$, y luego

$$\sum_{n \geqslant 1} |a_n||q_n(z)| \leqslant \sum_{n \geqslant 1} |a_n| n s^{n-1} < \infty,$$

pues ya verificamos que f y f' tienen el mismo radio de convergencia. Por el criterio de Weiertrass, deducimos que $f_1(z)$ es límite uniforme de funciones continuas en $B(0, s)$, así que es ella misma continua en ese disco. Como cualquier punto de $B(0, R_f)$ está en alguno de esos disco, esto completa la demostración. ◀

De lo anterior se desprende que f es infinitamente derivable en su disco de convergencia, pues su derivada es también una serie de potencias, definida en el mismo disco que f, y que para cada natural n,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Así, por ejemplo, sabemos ahora que las series

$$\ell(z) = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^n}{n}, \qquad u(z) = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \qquad (1+z)^\sigma$$

definen todas funciones holomorfas en el disco unidad.

Proposición 2.3. *Las ecuaciones*

$$\ell'(z) = (1+z)^{-1}, \qquad (1+z)^\sigma = \exp(\sigma\ell(z))$$

son válidas para todo z en el disco unidad.

Demostración. La primera de ellas se sigue por una cálculo directo. Para ver la segunda, consideremos la función $h : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$h(z) = b_\sigma(z)\exp(-\sigma\ell(z)),$$

que sabemos es holomorfa en su dominio. Por la regla de la cadena y el producto, obtenemos que

$$h'(z) = \sigma b_{\sigma-1}(z)\exp(-\sigma\ell(z)) - b_\sigma(z)\exp(-\sigma\ell(z))\sigma\ell'(z).$$

Pero $\ell'(z) = (1+z)^{-1}$ y, como sabemos que $b_\sigma(z) = (1+z)b_{\sigma-1}(z)$, resulta h' idénticamene nula en $B(0,1)$. Luego h es constante y, como $h(0) = 1$, resulta que $b_\sigma(z) = \exp(\sigma\ell(z))$ para todo z en el disco unidad, como se afirmó. ◀

2.2. Composición de series de potencias

Sean $f = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ y $g = \sum_{n\geqslant 0} b_n X^n$ series de potencias formales. Queremos definir una nueva serie formal, $f\circ g$, que se obtenga de “sustituir $X = g(Y)$ en f”. Consideremos el caso que $f = g = \sum_{n\geqslant 0} X^n$. Si sustituímos a f en ella misma, cada término f^n tiene un coeficiente independiente igual a 1, y no tiene sentido sumarlos para obtener el coeficiente independiente de $f\circ f$.

La forma de solucionar esta patología es suponer que $o(g) \geqslant 1$. En tal caso, la serie g^n involucrará sólo términos de órden por lo menos n, y luego en el caúlo de cada término de $f \circ g$ se verán involucrados solo *finitos* términos de f y g. En efecto, en tal caso para cada número natural N es

$$g^N = \sum_{n \geqslant N} b_n(N) X^n \qquad \text{dónde} \qquad b_n(N) = \sum_{i_1 + \cdots + i_N = n} b_{i_1} \cdots b_{i_N}.$$

Ahora calculamos formalmente,

$$\begin{aligned} f(g(X)) &= \sum_{N \geqslant 0} a_N g^N \\ &= \sum_{N \geqslant 0} a_N \sum_{n \geqslant N} b_n(N) X^n \\ &= \sum_{n \geqslant 0} \sum_{N \leqslant n} a_N b_n(N) X^n \\ &= \sum_{n \geqslant 0} d_n X^n \end{aligned}$$

Definimos entonces la ***sustitución de*** g ***en*** f, que notamos $f \circ g$, como la serie de potencias formal con término general $d_n = \sum_{N \leqslant n} a_N b_n(N)$. Recordemos que esto está definido *sólo* en el caso que $o(g) \geqslant 1$.

Proposición 2.4. *Supongamos que f y g tienen radio de convergencia positivo. Entonces lo mismo es cierto para $f \circ g$, y la función que define en su disco de convergencia coincide con la composición de f con g.*

Demostración. Escribamos B_f y B_g a los discos de convergencia de f y g, respectivamente. Como $g(0) = 0$, existe un disco $B' \subseteq B_g$ tal que $g(B') \subseteq B_f$. Esto asegura que la composición de f con g está definida. Más aún, como g converge absolutamente en B', podemos elegir B' de modo que para algún $r < R_f$, es $\sum_{n \geqslant 0} |b_n||z^n| < r$ para cada $z \in B'$.

Notemos ahora que todo los pasos que hicimos al evaluar $f(g(X))$ formalmente hasta llegar a nuestra definición de $f \circ g$ son valídos en el caso que $f(g(z))$ converja salvo, posiblemente, el intercambio en el orden suma que hicimos en el anteúltimo paso. En vista del Lema 3.2, es suficiente que verifiquemos que

$$\sum_{n \geqslant 0} \sum_{N \leqslant n} |a_n||b_N(n)||z|^n < \infty$$

cuando $z \in B'$. Ahora, tenemos la estimación

$$|b_N(n)| \leqslant |b|_N(n) \qquad \text{donde} \qquad |b|_n(N) = \sum_{i_1+\cdots+i_N=n} |b_{i_1}|\cdots|b_{i_N}|$$

y, volviendo atrás sobre nuestros pasos, tenemos que

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{N\leqslant n} |a_n||b|_N(n)||z|^n = \sum_{n\geqslant 0} |a_n| \left(\sum_{m\geqslant 1} |b_m||z|^m \right)^n < \infty,$$

pues $\sum_{m\geqslant 1} |b_m||z|^m < r$. ◀

La demostración anterior pone en evidencia que si no asumimos que g tiene orden por lo menos uno pero que tal bola B' existe, tiene sentido sustituir g en f, teniendo ahora en cuenta que los coeficientes de esta serie están sujetos a condiciones de sumabilidad. Para que tal bola exista es suficiente, por ejemplo, que $g(0) < R_f$.

Ejercicio 2.2. Probar que los primeros términos de la sustitución de $e^z - 1$ en e^z están dados por $B_n/n!$ donde B_n es la sucesión

$$1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, \ldots$$

Encontrar los primeros nueve términos de la serie inversa a $z^{-1}(e^z - 1)$.

3. Las series de potencias son analíticas

Sea Ω una región en $\mathbb{C}$ y $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que g es ***analítica*** si para cada punto $c \in \Omega$ existe un disco abierto no vacío B con centro c y una serie de potencias

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-c)^n$$

que converge en B a g. En este caso g es holomorfa, pues coincide localmente con una función holomorfa en virtud del Teorema 2.2. Luego, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Toda función analítica en una región es holomorfa allí.*

Además, el trabajo que hicimos en la Sección 2.2 prueba que, bajo condiciones apropiadas, la composición de funciones analíticas es analítica, y que el desarrollo en serie de esta composición se obtiene del desarrollo de las funciones que estamos componiendo.

Veamos ahora que toda serie de potencias es analítica en su disco de convergencia. Usaremos el siguiente lema sobre el intercambio del orden de una suma, que no probaremos. El lector puede encontrar una demostración y un tratamiento en detalle de series dobles en [2, Capítulo 8, Sección 21].

Lema 3.2. *Sea (A_{ij}) una sucesión en $\mathbb{C}$ indexada por $\mathbb{N}^2$, y supongamos que la serie doble $\sum_{m\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0}|A_{nm}|$ es finita. Entonces la serie*

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m\geqslant 0}|A_{nm}|$$

también es finita, y

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{m\geqslant 0}A_{nm}=\sum_{m\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0}A_{nm}.$$

Teorema 3.3. *La función $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica y para cada $c \in B$ admite un desarrollo en serie de potencias en $B(c, d_c)$, dónde d_c es la distancia de c al borde de B.*

Demostración. Para cada n natural podemos escribir,

$$z^n=(z-c+c)^n=\sum_{j\leqslant n}\binom{n}{j}(z-c)^j c^{n-j}$$

y luego

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}\sum_{j\leqslant n}\binom{n}{j}a_n(z-c)^j c^{n-j}.$$

Notemos que para cada $j \in \mathbb{N}$ la serie $b_j=\sum_{n\geqslant j}\binom{n}{j}c^{n-j}$ converge, pues no es otra cosa que $f^{(j)}(c)/j!$. Tendríamos completa la demostración, entonces, si quedara justificado el intercambio en el orden de las dos sumas en lo que sigue:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n\geqslant 0} \sum_{j\leqslant n} \binom{n}{j} a_n (z-c)^j c^{n-j} \\ &= \sum_{j\geqslant 0} \sum_{n\geqslant 0} \binom{n}{j} a_n c^{n-j} (z-c)^j \\ &= \sum_{j\geqslant 0} b_j (z-c)^j. \end{aligned}$$

Podemos tomar ahora z en un disco $B(c,\delta)$ con clausura contenida en B. En particular $r = |z-c| + |c| < R_f$, y entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant 0} \sum_{j\leqslant n} \binom{n}{j} |a_n||z-c|^j |c|^{n-j} &= \sum_{n\geqslant 0} |a_n|(|z-c|+|c|)^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n < \infty, \end{aligned}$$

por lo que el lema anterior dice que este intercambio es válido. Esto completa la demostración, y prueba además que el desarrollo obtenido en torno a c converge en cualquier disco abierto $B(c,\delta)$ con clausura contenida en B. ◀

4. La forma normal de una serie

Completar.

Capítulo III

Integrales de línea y teoría de Cauchy

1. Integración compleja

1.1. Notación y convenciones

The Committee which was set up in Rome for the unification of vector notation did not have the slightest success, which was only to have been expected.

Felix Klein (1849–1925) en su libro *Elementary Mathematics.*

En lo que sigue $I = [a,b]$ es un intervalo compacto en $\mathbb{R}$ y Ω denota una región en $\mathbb{C}$. Todo camino en Ω es suave a trozos, salvo mención de lo contrario. Escribimos $\mathrm{PS}(\Omega)$ al conjunto de tales caminos.

Fijemos un camino arbitrario $\gamma : I \longrightarrow \Omega$. La ***traza de*** γ es $\gamma(I)$ y la notaremos T_γ. El ***punto inicial de*** γ es $\gamma(a)$ y el ***punto final de*** γ es $\gamma(b)$, y los notamos $s(\gamma)$ y $t(\gamma)$, respectivamente. Decimos que γ es un ***lazo*** si $s(\gamma) = t(\gamma)$. Si $\delta : I \longrightarrow \Omega$ es otro camino, decimos que γ y δ son ***concatenables*** si $t(\gamma) = s(\delta)$, y escribimos $\gamma * \delta$ al camino $I \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$(\gamma * \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t-a) & \text{si } 2t-a \in I \\ \delta(2t-b) & \text{si } 2t-b \in I \end{cases}$$

Está claro que en este caso $\gamma * \delta$ es también un camino suave a trozos, y es precisamente para permitir la concatenación de caminos que ampliamos la clase de caminos suaves a la de caminos suaves a trozos: todo camino suave a trozos es, de forma no necesariamente única, la concatenación de caminos suaves.

Sean $z, w \in C$. Notaremos por $[z,w]$ al camino recto que une z con w, parametrizado por $t \in [0,1] \longmapsto z(1-t) + tw$ y por $\partial B_r(z)$ al círculo de radio r y centro z, parametrizado por $t \in [0,2\pi] \longmapsto z + re^{it}$. El ***camino constante en*** z está parametrizado por $t \in [0,1] \longmapsto z$ y lo notamos c_z. Los bordes de figuras como discos y rectángulos siempre estarán orientados en sentido antihorario.

1.2. Integrales en intervalos

Fijemos una función continua $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Definimos la ***integral de*** f ***sobre*** I por

$$\int_I f\,dt = \int_I \Re f\,dt + i\int_I \Im f\,dt$$

donde las integrales a la derecha denotan integrales de funciones reales, bien definidas por ser $\Re f$ e $\Im f$ continuas. Por su definición, la integral de f disfruta de propiedades análogas a las que valen para integrales reales usuales.

Proposición 1.1. *Valen las siguientes propiedades para la función*

$$\int_I : \mathscr{C}(I) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

(1) $\mathbb{C}$-linealidad. *Si $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ es otra función continua y si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\int_I (f + \lambda g)\, dt = \int_I f\, dt + \lambda \int_I g\, dt.$$

(2) Aditividad en intervalos. *Si subdividimos a I en dos subintervalos I_1 e I_2, entonces*

$$\int_I f\, dt = \int_{I_1} f\, dt + \int_{I_2} f\, dt.$$

(3) Compatibilidad.

$$\Re\left(\int_I f\, dt\right) = \int_I \Re f\, dt, \qquad \Im\left(\int_I f\, dt\right) = \int_I \Im f\, dt.$$

(4) Continuidad. *Vale la estimación*

$$\left|\int_I f\, dt\right| \leqslant \int_I |f|\, dt.$$

Demostración. Dado que las primeras dos propiedades se demuestran exactamente como en el caso real y que la tercera es una verificación inmediata, sólo probamos la validez de la última. Tomemos $\varphi \in [0, 2\pi]$ de modo que $e^{i\varphi} \int_I f\, dt \in \mathbb{R}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\int_I f\,dt\right| &= \left|e^{i\varphi}\int_I f\,dt\right| \\
&= \left|\int_I \Re(e^{i\varphi}f)\,dt\right| && \text{por compatibilidad,} \\
&\leqslant \int_I |\Re(e^{i\varphi}f)|\,dt && \text{por la estimación en el caso real,} \\
&\leqslant \int_I |f|\,dt && \text{por ser } |\Re(f)| \leqslant |f|.
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. ◀

Decimos que f es ***derivable*** si lo son su parte real y su parte imaginaria y, en tal caso, definimos $f' = (\Re f)' + i(\Im f)'$. Una función derivable $F : I \longrightarrow \mathbb{C}$ es una ***primitiva de*** f si $F' = f$. La siguiente proposición es simplemente una reformulación del teorema fundamental de cálculo en nuestro contexto, por lo que omitimos su demostración.

Proposición 1.2. *La función $F : I \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(t) = \int_a^t f\,dt$ es derivable y es una primitiva de f y, si G es cualquier primitiva de f, entonces*

$$\int_I f\,dt = G(b) - G(a).$$

Un corolario inmediato de lo anterior es el siguiente, que usaremos con frecuencia en las próximas secciones.

Corolario 1.3. *Dos primitivas de $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ difieren en una constante.*

1.3. Integrales de línea

Fijemos ahora una funcion continua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Si γ es un camino suave en Ω, entonces $\gamma' : I \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua y la función $(f\circ\gamma)\gamma' : I \longrightarrow \mathbb{C}$ es, a su vez, también continua. Definimos la ***integral de*** f ***a lo largo de*** γ por

$$\int_\gamma f\,dz = \int_I (f\circ\gamma)\gamma'\,dt.$$

Si γ es una concatenación $\gamma_1 * \gamma_2$ de caminos suaves $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{C}$, definimos

$$\int_\gamma f\, dz = \int_{\gamma_1} f\, dz + \int_{\gamma_2} f\, dz.$$

Inductivamente, queda definida la integral de f sobre un camino arbitrario. De lo ya demostrado deducimos algunas propiedades análogas para integrales de línea.

Proposición 1.4. *Fijemos un camino γ en Ω. Valen las siguientes propiedades para la función*

$$\int_\gamma : \mathscr{C}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

(1) $\mathbb{C}$-linealidad. *Si $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es otra función continua y si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces*

$$\int_\gamma (f + \lambda g)\, dz = \int_\gamma f\, dz + \lambda \int_\gamma g\, dz.$$

(2) Aditividad. *Si subdividimos a γ en dos caminos concatenables γ_1 y γ_2, entonces*

$$\int_\gamma f\, dt = \int_{\gamma_1} f\, dt + \int_{\gamma_2} f\, dt.$$

Por conveniencia, extendemos la definición de la integral de línea para contemplar operaciones usuales sobre γ: definimos

$$\int_\gamma f\, d\overline{z} = \int_I (f \circ \gamma)\overline{\gamma'}\, dt, \qquad \int_\gamma f\, |dz| = \int_I (f \circ \gamma)|\gamma'|\, dt.$$

Notemos que en particular $\int_\gamma |dz| = \int_I |\gamma'|\, dt$ es la longitud de la curva γ, que notamos $L(\gamma)$. No es difícil verificar ahora las siguientes propiedades usando la Proposición 1.1 en el segundo caso.

(1) $\overline{\int_\gamma f\, dz} = \int_\gamma \bar{f}\, d\overline{z}$

(2) $\left|\int_\gamma f\, dz\right| \leqslant \int_\gamma |f||dz|$.

De la segunda propiedad deducimos el siguiente resultado, que será central en mucho de lo que sigue.

Lema 1.5 (Estimación estándar)**.** *Para todo camino* $\gamma \in \mathrm{PS}(\Omega)$, *vale la estimación*

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leqslant L(\gamma)|f|_\gamma.$$

donde $|f|_\gamma = \max_{t\in I}|f(\gamma(t)|$ *es el máximo de* f *sobre* γ.

Queda como ejercicio demostrar que la integral de línea es independiente de la parametrización elegida de un camino, por lo que siempre eligiremos arbitrariamente la parametrización de un camino que nos resulte más conveniente.

Dado un camino $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$, definimos γ^* como el camino que tiene la misma traza que γ pero recorrida en el sentido inverso: $\gamma^*(t) = \gamma(b+a-t)$ para $t \in I$. Llamamos a γ^* el ***camino inverso a*** γ. Es fácil verificar que, con esta definición,

$$\int_{\gamma*} f\,dz + \int_\gamma f\,dz = 0.$$

Tendremos la oportunidad de usar lo anterior cuando integremos sobre dos curvas que se solapan sobre algun segmento y sobre el que tienen orientaciones inversas. Lo anterior afirma que la contribución de este segmento a la integral es nula.

Si f es continua en Ω, una ***primitiva de*** f ***en*** Ω es una función F, holomorfa en Ω, tal que $F' = f$. En este caso decimos que f es ***integrable en*** Ω. Como sucedió en el caso de integrales sobre intervalos, tenemos un análogo al teorema fundamental del cálculo, que es simplemente una reformulación del mismo en nuestro contexto. La existencia de primitivas ahora no está garantizada, como veremos más adelante.

Proposición 1.6. *Una función* $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *es una primitiva de* f *en* Ω *si y solamente si*

$$\int_\gamma f\,dz = F(t(\gamma)) - F(s(\gamma))$$

para todo camino γ *en* Ω.

Demostración. Podemos asumir que γ es suave por la aditividad de la integral. En este caso, si $F' = f$, entonces la regla de la cadena garantiza que $(f \circ \gamma)\gamma' = (F \circ \gamma)'$ y, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_\gamma f\,dz = \int_I (F \circ \gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

como afirma la proposición.

Supongamos ahora que vale la condición sobre caminos para F y fijemos $w \in \Omega$. Podemos tomar un disco B con centro w contenido en Ω y, si z está en tal disco,

$$F(w) - F(z) = f(w)(z-w) + \int_{[w,z]} (f(\xi) - f(w))\,d\xi.$$

que podemos reescribir, si definimos $F_1(z) = \dfrac{1}{z-w}\displaystyle\int_{[w,z]} (f(\xi) - f(w))\,d\xi$ si $z \neq w$ y $F_1(w) = 0$, como

$$F(w) - F(z) = f(w)(z-w) + F_1(z)(z-w).$$

Queda ver que F_1 es continua en w. Usando la estimación estándar, resulta que

$$|F_1(z)| \leqslant \frac{1}{|z-w|} L([z,w]) |f - f(w)|_{[z,w]} = |f - f(w)|_{[z,w]},$$

pues $L([z,w]) = |z-w|$. Finalmente, como f es continua en w, obtenemos que $\lim\limits_{z \to w} F(z) = 0$, como queríamos. ◀

De lo anterior deducimos una parte del siguiente teorema:

Teorema 1.7. *La función f admite una primitiva en Ω si y solamente si para todo lazo γ en Ω,*

$$\int_\gamma f\,dz = 0.$$

Demostración. La proposición anterior implica que si F es una primitiva de f y γ es un lazo en Ω,

$$\int_\gamma f\,dz = F(t(\gamma)) - F(s(\gamma)) = 0,$$

que prueba una de las implicaciones. Supongamos que vale la condición sobre caminos cerrados para f, y eligamos un punto $c \in \Omega$ y, para todo $z \in \Omega$, elijamos un camino γ_z que une c con z. Definimos

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\xi)\, d\xi.$$

Para ver que F es una primitiva de f, basta ver que si γ es un camino en Ω que une z con w, vale la igualdad

$$F(z) - F(w) = \int_\gamma f(\xi)\, d\xi,$$

y esto es inmediato, pues podemos reescribirla como

$$\int_{\gamma_z * \gamma^* * \gamma_w^*} f(\xi) d\xi = 0,$$

y $\gamma_z * \gamma^* * \gamma_w^*$ es un lazo. ◀

El siguiente resultado afirma que podemos intercambiar integrales con límites uniformes de funciones.

Lema 1.8. *Supongamos que (f_n) es una sucesion en $\mathscr{C}(\Omega)$ y converge de forma localmente uniforme a $f \in \mathscr{C}(\Omega)$. Para todo camino γ en Ω,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n\, dz = \int_\gamma f\, dz.$$

Demostración. Para cada punto c de γ existe un disco abierto B_c donde $f_n \longrightarrow f$ uniformemente, y los discos B_c con $c \in \gamma$ cubren a γ. Como γ es compacta, finitos discos $B_1, \ldots, B_s$ la cubren, y luego $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en γ. Pero, por la estimación estándar,

$$\left| \int_\gamma (f - f_n)\, dz \right| \leqslant |f - f_n|_\gamma L(\gamma)$$

y, como $|f - f_n|_\gamma \to 0$ en vista de la convergencia uniforme, lo mismo vale para el término izquierdo, como queríamos. ◀

2. Teoría de Cauchy en discos

Nos proponemos ahora probar el siguiente resultado, conocido como la ***fórmula integral de Cauchy***, del que podremos deducir una batería de herramientas teóricas muy útiles.

Teorema 2.1. *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y si B es un disco cuya clausura está contenida en Ω, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \tag{III.1}$$

para todo punto $z \in B$. En particular, si c es el centro de B y r su radio,

$$f(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c + re^{it})\, dt.$$

Para demostrarlo, nos valdremos de algunos resultados preliminares. Uno se deduce del cálculo, quizás no tan simple, de una familia de integrales, centrales a la teoría de Cauchy.

Lema 2.2. *Sea B un disco y $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{d\xi}{(\xi - z)^n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \text{ y } z \in B, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. En caso que $n > 1$ la función $h_n(\xi) = (\xi - z)^{-n}$ admite como primitiva a $H_n(\xi) = (1-n)^{-1}(\xi - z)^{1-n}$, por lo que el Teorema 1.7 da lo que queremos. Supongamos entonces que $n = 1$. Si z no está en $\overline{B}$, entonces h_1 admite como primitiva una rama del logaritmo $\log(\xi - z)$ en $\mathbb{C} \smallsetminus L$, donde L es una semirrecta con origen en z que no corta a $\overline{B}$. Nuevamente, concluímos lo que queremos con el Teorema 1.7.

Basta considerar el caso que $z \in B$. Supongamos primero que z es el centro c de B y que r es su radio. Entonces $\gamma(t) = c + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ parametriza a ∂B y calculamos

$$\int_{\partial B} \frac{d\xi}{\xi - c} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i dt = 1.$$

Supongamos ahora que $z \neq c$. Escribimos

$$h_1(\xi) = \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - c} \frac{1}{1 - \dfrac{z - c}{\xi - c}} = \frac{1}{\xi - c} \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{z - c}{\xi - c} \right)^n.$$

Esta expansión en serie es válida en el conjunto de los ξ con $|\xi - c| > |z - c|$, que no es otra cosa que el complemento de un disco con centro en c y radio $|z - c|$, es decir, un anillo no acotado de centro c, que en particular contiene al disco B. Además, la convergencia es unfirome sobre compactos y luego uniforme en cualquier conjunto de la forma $A_t(c) = \mathbb{C} \smallsetminus B(c, t)$ con $t > |z - c|$, y podemos elegir tal anillo no acotado $A_t(c)$ para que contenga el borde de B. Por el Lema 1.8, basta con evaluar las integrales

$$I_n = \int_{\partial B} \frac{1}{\xi - c} \left(\frac{z - c}{\xi - c} \right)^n d\xi.$$

Pero esto ya lo hicimos: sabemos que $I_n = 0$ si $n > 0$, mientras que si $n = 0$, obtenemos

$$I_0 = \int_{\partial B} \frac{1}{\xi - c} d\xi = 2\pi i.$$

Esto completa la demostración. ◀

Ejercicio 2.1. Usando lo anterior, probar que $f(z) = z^{-1}$ no admite una primitiva en ninguna región de $\mathbb{C}^\times$ que contiene un círculo con el origen en su interior.

2.1. Teorema de Goursat

El siguiente resultado, conocido como el ***teorema de Goursat***, es la piedra angular de la teoría de Cauchy y se debe a Édouard Jean-Baptiste Goursat (1858–1936). Fue quizás el primero en notar que no es necesario asumir que la derivada de una función holomorfa es continua para probar el siguiente teorema —de hecho, el resultado de Goursat permitirá, eventualmente, que deduzcamos que la derivada de una función holomorfa es también holomorfa. Sin embargo, la primera demostración que dió, publicada en 1884, hace uso de esta hipótesis, aunque luego en 1899 advirtió que era suficiente asumir la derivabilidad de la función. Goursat escribe, respecto a esto: *He reconocido después de un largo tiempo que la demostración del teorema de Cauchy que di en 1883 no presupone realmente la continuidad de la derivada.* (J'ai reconnu depuis longtemps que la démonstration du théorème de Cauchy, que j'ai donnée en 1883, ne supposait pas la continuité de la derivée.) El lector puede encontrar una gran colección de relatos históricos en el libro [14] de Remmert, que incluye, en particular, el anterior.

Teorema 2.3. *Sea $c \in \Omega$ y sea f holomorfa en $\Omega \smallsetminus \{c\}$ y continua en c. Entonces para todo rectángulo R en Ω,*

$$\int_{\partial R} f\,dz = 0.$$

Demostración. Supongamos primero que f es holomorfa en todo Ω y fijemos un rectángulo R en Ω. Por comodidad, notamos $a(R) = \int_{\partial R} f\,dz$. Descompongamos a R en cuatro rectángulos congruentes $R_1, \ldots, R_4$, como ilustra la Figura III.1. Los segmentos internos a R se cancelan unos con otros, y $a(R) = \sum_{i=1}^{4} a(R_i)$, así resulta que

$$|a(R)| \leqslant \sum_{i=1}^{4} |a(R_i)|,$$

y debe ser el caso que $|a(R^1)| \geqslant 4^{-1}|a(R)|$ para R^1 alguno de los rectángulos $R_1, \ldots, R_4$. Si es el caso que esta desigualdad vale para todos, acordamos elegir el de la esquina inferior izquierda.

Repetimos ahora el argumento para R^1, obteniendo $R^2 \subseteq R^1$ que cumple $|a(R^2)| \geqslant$

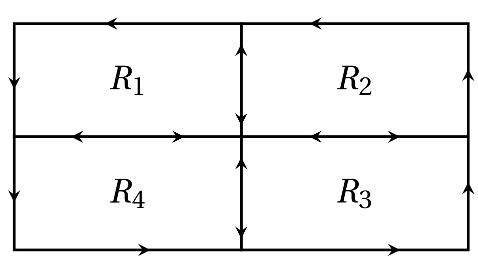


Figura III.1: El primer paso de la subdivisión de R en la demostración.

$4^{-1}|a(R^1)|$. Inductivamente, construímos una familia decreciente de rectángulos $\mathscr{R} = \{R^j : j \in \mathbb{N}\}$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$,

- $|a(R^j)| \geqslant 4^{-j}|a(R)|$,
- $L(\partial R^j) = 2^{-j}L(\partial R)$.
- $\bigcap_{j\geqslant 1} R^j$ contiene exactamente un punto z_0.

La función f es holomorfa en z_0, y luego existe una función f_1, continua en z_0, tal que $f_1(z_0) = 0$ y

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + f_1(z)(z - z_0).$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \varepsilon$ implica $|f_1(z)| < \varepsilon$, y tomemos $j \gg 0$ tal que R^j está contenido en $B(z_0, \delta)$: esto es posible por la forma en que construímos la familia $\mathscr{R}$. Como el polinomio lineal $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ admite una primitiva, su integral sobre el lazo ∂R^j se anula, y luego

$$a(R^j) = \int_{\partial R^j} f_1(z)(z - z_0)\,dz.$$

Además, la estimación estándar asegura que

$$|a(R^j)| \leqslant \varepsilon L(\partial R^j) \max_{\partial R^j} |z - z_0|$$

pues $|f_1|_{\partial R^j} < \varepsilon$. Como la diagonal mayor de R^j no supera su perímetro, obtenemos que $|a(R^j)| \leqslant \varepsilon L(\partial R^j)^2$.

Reemplazando esto último en la desigualdad $|a(R^j)| \geqslant 4^{-j}|a(R)|$ y usando la igualdad $L(\partial R^j) = 2^{-j}L(R)$ obtenemos que

$$a(R) \leqslant 4^j 4^{-j} L(R)^2 \varepsilon = L(R)^2 \varepsilon$$

y, en vista de que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, que $a(R) = 0$, como se dijo.

El caso que f es holomorfa salvo posiblemente en c es ahora fácil. Dado un rectángulo R en Ω podemos asumir, primero, que el punto excepcional c está en R, y segundo, que es de hecho un vértice de R: si no es el caso, la siguiente figura muestra como expresar $a(R)$ como una suma de cuatro términos $a(R^1),\dots,a(R^4)$ donde R^i es un rectángulo con un vértice en c, y será suficiente ver que cada una de éstas integrales se anulan.

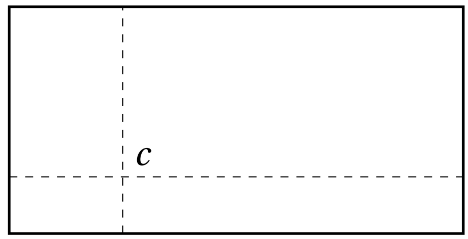


Figura III.2: La reducción al caso que c es un vértice de R.

Ahora simplemente podemos escribir $a(R) = a(R')$ donde R' es un subrectángulo arbitrario de R con vértice en c, usando lo anterior y, dado que $|a(R)| \leqslant L(\partial R)|f|_{\partial R}$ y que $|f|_{\partial R}$ está acotada y $L(\partial R) \to 0$ si R se aproxima a c, deducimos lo pedido, que completa la demostración del teorema. ◀

Notemos que la misma demostración por division en cuatro figuras congruentes funciona si cambiamos rectángulos por triángulos. Usaremos esto en lo que sigue, es decir, que la integral de una función holomorfa sobre triángulos se anula. El lector está invitado a dar los detalles de la demostración, y a notar que es realmente más conveniente tener esta versión del teorema de Goursat, que implica, en particular, su validez para polígonos arbitrarios.

2.2. El teorema integral

Diremos que Ω tiene ***centro estelar*** c si para todo $z \in \Omega$ el segmento $[c,z]$ está contenido en Ω. En ese caso, diremos que Ω es un ***conjunto estelar con centro*** c. Vale notar que un conjunto estelar puede admitir más de un centro: por ejemplo, un conjunto convexo C es precisamente aquel que es estelar con centro c para todo $c \in C$.

Teorema 2.4. (Teorema integral para regiones estelares.) *Sea Ω estelar con centro c, y sea f holomorfa en Ω. Entonces f en integrable en Ω y la función $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$*

definida por

$$F(z) = \int_{[c,z]} f(\xi)\, d\xi$$

es una primitiva de f. En particular, para todo lazo en Ω

$$\int_\gamma f\, dz = 0. \tag{III.2}$$

Demostración. Basta observar que si z y w son dos puntos contenidos en algun disco en Ω, el teorema de Goursat asegura que

$$F(z) - F(w) = \int_{[w,z]} f(\xi)\, d\xi.$$

pues la integral de f sobre el triángulo con vértices z, w y c es nula. Podemos imitar ahora la demostración del Teorema 1.7 para probar que F es una primitiva de f. ◂

El teorema anterior implica que toda función holomorfa admite una primitiva *localmente*: si f es holomorfa en Ω y z es un punto de esta región, entonces f tiene integral nula sobre cualquier triángulo contenido en un disco convexo B con centro z y contenido en Ω, y luego por el teorema anterior admite allí una primitiva.

Un corolario útil del Teorema 2.4 es el hecho que las funciones holomorfas sin ceros admiten logaritmos, y luego raíces, sobre cualquier región estelar donde estén definidas. Consideraremos esto en más detalle en el Capítulo V, Sección 2.

Corolario 2.5. *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y supongamos que Ω es estelar y f no se anula sobre Ω. Entonces existe $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\exp g = f$ en Ω. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $q_n = \exp(n^{-1}g)$ cumple que $q_n^n = f$.*

Demostración. La función $h = f'/f$ es holomorfa sobre Ω, y admite entonces una primitva g_0. Es inmediato verificar que la función $\exp(-g_0)f$ tiene derivada nula sobre Ω, así es constante, y tal constante λ es no nula. Si escribimos $\lambda = \exp\mu$ entonces $g = g_0 + \mu$ es tal que $\exp g = f$. La afirmación sobre la función q_n es inmediata, y esto completa la demostración del corolario. ◂

2.3. Prueba de la fórmula integral de Cauchy

Tenemos toda la maquinaria necesaria para probar la ́formula integral de Cauchy.

Demostración del Teorema de Cauchy. Tomemos $z \in B$, un disco B' en Ω que contiene a B, y consideremos la función $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \text{ para } \xi \in \Omega \smallsetminus \{z\} \qquad \text{y} \qquad g(z) = f'(z).$$

Evidentemente g es holomorfa en $\Omega \smallsetminus \{z\}$ y continua en z. Por el teorema de Goursat en su versión para triángulos, g tiene integral nula sobre cualquier triángulo, y luego, por el Teorema 2.4, g admite una primitiva en el conjunto convexo B'. Así, su integral sobre cualquier lazo en B' es nula. En particular,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} g(\xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - f(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{d\xi}{\xi - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - f(z), \end{aligned}$$

dónde última integral la calculamos en el Lema 2.2. Si elegimos $z = c$ el centro de B, entonces

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{it})}{re^{it}} rie^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{it}) dt.$$

Esto completa la demostración del teorema. ◀

La última igualdad que obtuvimos se conoce como la ***igualdad del valor medio*** para funciones holomorfas, y afirma que el valor de $f(c)$ queda determinado por los valores de f en cualquier disco de centro c y radio suficientemente pequeño. En particular, deducimos la ***desigualdad del valor medio:*** si f es holomorfa en un entorno de c y B es un disco suficientemente pequeño con centro c, entonces $|f(c)| \leqslant |f|_{\partial B}$.

Es importante que notemos que la hipótesis de que B esté contenida en Ω, y no solo lo esté su borde, es necesaria en el teorema anterior. En efecto, consideremos el caso que $\Omega = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, que $f(z) = z^{-1}$ y que $B = B(0,r)$ para un $r > 0$. Si $z \in B(0,r) \smallsetminus \{0\}$, entonces

$$\int_{\partial B} \frac{d\xi}{\xi(\xi - z)} = z \int_{\partial B} \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi = 0 \neq f(z),$$

y luego nuestra fórmula no es válida en este caso.

2.4. Una aplicación del teorema integral

Veamos una aplicación del Teorema 2.4 al cálculo de una integral.

Proposición 2.6. *Fijemos* $0 < a \leqslant 1$. *Entonces*

$$\int_0^\infty e^{-(1+ai)^2 t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{1+ai}$$

Demostración. Sea $r > 0$ y sea T_r un triángulo con vértices en 0, $r(1+ai)$ y r, orientado positivamente. Integrando a la función entera $f(z) = e^{-z^2}$ sobre T_r, que es un lazo en el conjunto convexo $\mathbb{C}$, obtenemos la igualdad

$$\int_{[0,r]} f \, dz = \int_{[0,r(1+ia)]} f \, dz + \int_{[r,r(1+ai)]} f \, dz.$$

Las primeras dos integrales coinciden con

$$\int_0^r e^{-t^2} \, dt \qquad \text{y} \qquad (1+ai) \int_0^r e^{-(t(1+ai))^2} \, dt$$

respectivamente. Veamos que sucede con la última integral, que es igual a

$$I(r) = i \int_0^{ar} f(r + it) \, dt.$$

Ahora, tenemos la estimación $|f(r+it)| = e^{-r^2+t^2} \leqslant e^{-r^2} e^{rt}$ si $0 \leqslant t \leqslant r$ y, como $ar \leqslant r$, a su vez podemos estimar nuestra integral como sigue:

$$|I(r)| \leqslant \int_0^{ar} e^{-r^2} e^{rt} \, dt \leqslant e^{-r^2} \int_0^r e^{rt} \, dt.$$

Finalmente, sabemos que $\int_0^r e^{rt}\,dt = r^{-1}(e^{r^2}-1)$, así $|I(r)| \leqslant r^{-1}$, y esto tiende a cero cuando $r \to \infty$. Deducimos que, en el límite,

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = (1+ai)\int_0^\infty e^{-(t(1+ai))^2}\,dt,$$

que completa la demostración si usamos que $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ◀

2.5. Desarrollo en series de potencias

Usando la fórmula integral de Cauchy podemos probar que toda función holomorfa en Ω admite un desarrollo en serie de potencias en torno a cada punto de esta región. Una función con esta propiedad se dice ***analítica en*** Ω. Recordemos que toda función analítica es holomorfa.

Lema 2.7. *Sea γ una curva en Ω y sea f continua en Ω, y definamos otra función $F : \Omega \smallsetminus \gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ por*

$$F(z) = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \quad \textit{para } z \in \Omega \smallsetminus \gamma.$$

Entonces:

(1) F es holomorfa en $\Omega \smallsetminus \gamma$.

(2) Para cada punto c en tal dominio la serie de potencias

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n (z-c)^n \qquad \textit{con coeficientes} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{n+1}}\,d\xi$$

converge en todo disco centrado en c que no corta a γ y converge, de hecho, a F.

(3) F es infinitamente derivable y, para cada natural n y cada $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \gamma$,

$$\frac{F^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi.$$

En la demostración que sigue omitimos algunos cálculos intermedios y cuando lo hacemos lo marcamos con una estrella ($\star$). Si duda de algunas de tales igualdades, está obligado a verificarlas en detalle.

Demostración. Fijamos un disco B con centro c y radio r que no corta a γ. Si $|w| < 1$, diferenciando la serie geométrica, obtenemos la igualdad

$$\frac{1}{(1-w)^{n+1}} = \sum_{j\geqslant n} \binom{n}{j} w^{j-n} \tag{III.3}$$

que, con el cambio de variable $w = (z-c)(\xi-c)^{-1}$, da la igualdad

$$\frac{1}{(\xi-z)^{n+1}} \overset{\star}{=} \sum_{j\geqslant n} \binom{n}{j} \frac{1}{(\xi-c)^{n+1}} (z-c)^{j-n}.$$

válida para cada $z \in B$ y $\xi \in \gamma$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, pongamos $f_j(\xi) = f(\xi)(\xi-c)^{-j-1}$ donde ξ está en γ. Por lo anterior, deducimos que si $z \in B$,

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi \overset{\star}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{j\geqslant n} n!\binom{n}{j} f_j(\xi)(z-c)^{j-n} d\xi. \tag{III.4}$$

Como $|\xi - c| \geqslant r$ para ξ en γ, la definición de f_n asegura que $|f_n|_\gamma \leqslant r^{-n-1}|f|_\gamma$ y, a su vez, esto asegura que, si $q = r^{-1}|z-c|$,

$$|g_n|_\gamma|(z-c)^{n-j}| \overset{\star}{\leqslant} r^{-n-1}|f|_\gamma|q^{n-j}.$$

Como $0 \leqslant q < 1$ para nuestra elección de z y como la serie de (III.3) converge para $w = q$, deducimos que la serie en (III.4) converge uniformemente sobre compactos y luego, por el Teorema 1.8, podemos intercambiar la suma y la integral, obteniendo

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi \overset{\star}{=} \sum_{j\geqslant n} n!\binom{n}{j} a_n (z-c)^{j-n}. \tag{III.5}$$

Para concluir, notamos que si $n = 0$ esto da el desarrollo en series buscado y prueba que F es holomorfa y que, además, el término derecho de (III.5) es el que se obtiene al derivar n veces el desarrollo en series de potencias de F recién obtenido, que da la tercera afirmación del lema. ◀

En vista del teorema integral de Cauchy y este lema, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.8. *Toda función f holomorfa en Ω admite un desarrollo en serie de potencias en torno a cada punto $c \in \Omega$*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n (z-c)^n \qquad \textit{con coeficientes} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi-c)^{n+1}}\,d\xi$$

donde B es un disco con clausura contenida en Ω que contiene a c en su interior. Tal serie de potencias converge compactamente en $B(c,r)$ donde r es menor a la distancia de c al borde de Ω. En particular, f es derivable infinitamente y para cada $n \in \mathbb{N}$ vale la fórmula integral

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi.$$

Una consecuencia notable de este resultado es que la serie de Taylor de una función entera en torno a *cualquier* punto converge en *todo* $\mathbb{C}$. Todo lo hecho hasta ahora prueba el siguiente teorema.

Teorema 2.9. *Sea $f \in \mathscr{C}(\Omega)$. Son equivalentes*

(1) f es holomorfa en Ω,

(2) f es analítica en Ω,

(3) f es localmente integrable en Ω,

(4) f tiene integral nula sobre cualquier triángulo en Ω,

(5) f cumple la fórmula integral de Cauchy para todo disco con clausura contenida en Ω.

Demostración. En efecto, tenemos el siguiente diagrama de implicaciones

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Cauchy}} \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{Goursat}} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\boxed{\text{Analítica}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{Holomorfa}} \arrow[u, Rightarrow] & \boxed{\text{Localmente integrable}} \arrow[l, Rightarrow, dashed]
\end{tikzcd}
$$

que sabemos valen, salvo posiblemente aquella punteada. Sin embargo, una función localmente integrable es localmente la derivada de una función holomorfa, y ya sabemos que la derivada de una función holomorfa es ella misma holomorfa. Deducimos así que todas las afirmaciones son equivalentes. ◄

La implicación (3) $\Longrightarrow$ (1) se conoce como el ***teorema de Morera,*** y se debe, como su nombre lo indica, a Giacinto Morera (1856-1909), que lo demostró en 1886. Una aplicación interesante de este resultado es la siguiente, que nos será de utilidad.

Proposición 2.10. *Sea Ω una región y γ un camino en Ω, y tomemos $g : \gamma \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Supongamos que para cada $\xi \in \gamma$ la función*

$$z \in \Omega \longmapsto g(\xi, z) \in \mathbb{C}$$

es holomorfa. Entonces la función $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$h(z) = \int_\gamma g(\xi, z)\, d\xi$$

es también holomorfa.

Demostración. Veamos que la integral de h sobre cualquier triángulo Δ contenido en Ω es nula: el teorema anterior prueba que, en este caso, h es holomorfa. En efecto, como $g(\xi, z)$ es continua en su dominio, su integral sobre $\gamma \times \partial\Delta$, que está parametrizado por cuadrado $I_1 \times I_2$, puede calcularse como una integral iterada.

Luego
$$\int_{\partial\Delta} h\,dz = \int_{\partial\Delta}\int_{\gamma} g(\xi,z)d\xi\,dz = \int_{\gamma}\int_{\partial\Delta} g(\xi,z)\,dz d\xi = 0,$$
pues cada $z \longmapsto g(\xi,z)$ es holomorfa. ◀

El lector puede encontrar una prueba de la validez del intercambio del orden de integración en [16, Capítulo 4, Teorema 3-10]. Vale destacar que este resultado es elemental, y no usa la maquinaria de la integración abstracta en espacios de medida.

3. Primitivas e invarianza homotópica

3.1. Primitivas a lo largo de caminos

Hasta ahora definimos la integral de una función continua sobre un camino en el caso que éste sea suave a trozos. Una forma indirecta de extender la definición a caminos que son solamente *continuos* es mediante la noción de primitiva a lo largo de un camino, que presentamos en lo que sigue. Este no es realmente el motivo principal por el que las primitivas de este tipo nos son de utilidad: serán nuestra herramienta principal para probar la invarianza homotópica de la integral sobre funciones holomorfas.

Fijemos un camino continuo $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ y una función holomorfa f en Ω. Una ***primitiva de f a lo largo de*** Ω es una función $F : I \longrightarrow \Omega$ que cumple la siguiente condición: para cada $t \in I$ existe un entorno abierto U de $\gamma(t)$ y una primitiva G de f en U tal que $F \circ \gamma = G$ en un entorno de t.

Proposición 3.1. *La función f admite primitivas a lo largo de γ y dos de ellas difieren en una constante.*

Demostración. Como dos primitivas de f difieren de una constante, lo mismo será cierto para primitivas de f a lo largo de curvas. Para ver que tales primitivas existen, notemos que existe, para cada punto z de γ, un disco B_z y una primitiva F_z de f en tal disco. Como γ es compacto, existen finitos discos que los cubren y podemos elegir, por la continuidad uniforme de γ, una subdivisión $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ de I de forma que cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$ tenga imagen bajo γ en alguno de estos finitos discos, que notamos B_i. Notemos también F_i a la primitiva de f correspondiente a B_i. En particular, F_0 da una primitiva de f a lo largo de $\gamma|_{[t_0,t_1}$. Supongamos que obtuvimos una primitiva $F_{0,i}$ de f a lo largo

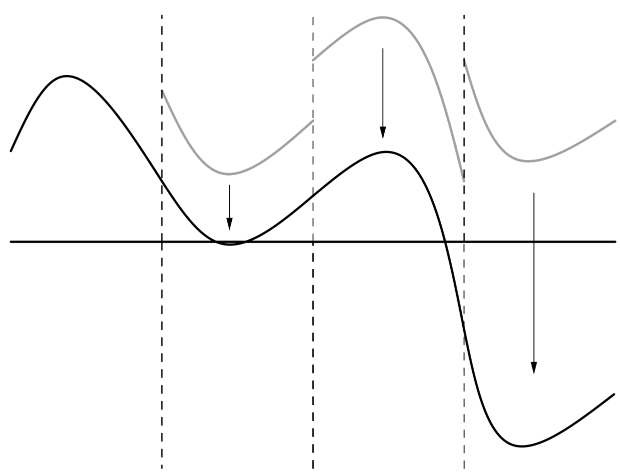


Figura III.3: Un esquema del argumento de pegado en la demostración.

de $\gamma|_{[t_0,t_i]}$. Como B_i y B_{i+1} se intersecan en un conjunto conexo que contiene a $\gamma(t_i)$, existe una constante c tal que $F_{0,i} = F_{i+1} + c$. Podemos reemplazar a F_{i+1} por $F_{i+1} + c$, que sigue siendo una primitiva local de f, y obtenemos así una primitiva de f a lo largo de $\gamma|_{[t_0,t_{i+1}]}$. Inductivamente, queda construída F una primitiva de f a lo largo de toda la curva γ. ◀

Dada una primitiva F de f a lo largo de γ, definimos la integral de f a lo largo de γ por

$$\int_\gamma f\, dz = F(b) - F(a).$$

Esta definición no depende de la elección de primitiva F por la proposición anterior y es consistente con nuestra definición en el caso que γ sea suave a trozos en vista de la Proposición 1.6: es suficiente usar tal proposición en los subintervalos

$[t_i, t_{i+1}]$ donde f admite una primitiva F_i para obtener

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} (F(t_{i+1}) - F(t_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}} f\,dz$$
$$= \int_{\gamma} f\,dz.$$

3.2. Homotopías y regiones simplemente conexas

Fijemos ahora $I = [0,1]$ el intervalo unidad y dos caminos γ_0 y $\gamma_1 : I \longrightarrow \Omega$ y consideremos los casos en que

(a) tienen el mismo punto inicial y el mismo punto final ó,

(b) ambos son caminos cerrados.

Una ***homotopía de*** γ_0 ***a*** γ_1 es una función continua $H : I \times I \longrightarrow \Omega$ que cumple que

- $H(s,0) = \gamma_0(s)$ para $s \in I$,
- $H(s,1) = \gamma_1(s)$ para $s \in I$,
- $t \longmapsto H(0,t)$ y $t \longmapsto H(1,t)$ son caminos constantes en el caso (a) o que,
- $s \longmapsto H(s,t)$ es un lazo para cada $t \in I$ en el caso (b).

En el caso (a) decimos que γ_0 y γ_1 son ***homotópicos por extremos fijos en*** Ω y en el caso (b) que son ***homotópicos como lazos en*** Ω, y en ambos casos notamos $\gamma_0 \simeq \gamma_1$. Es útil pensar a una homotopía como una familia continua de caminos $\gamma_t(s) = H(s,t)$ que comienza en $\gamma_0(t)$ y termina en $\gamma_1(t)$. La Figura III.4 ilustra una homotopía en el primero de los dos casos. El lector está invitado a hacer lo mismo en el segundo caso.

Teorema 3.2. (Invarianza homotópica) *Si γ_0 y γ_1 son caminos homotópicos en Ω, entonces*

$$\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz.$$

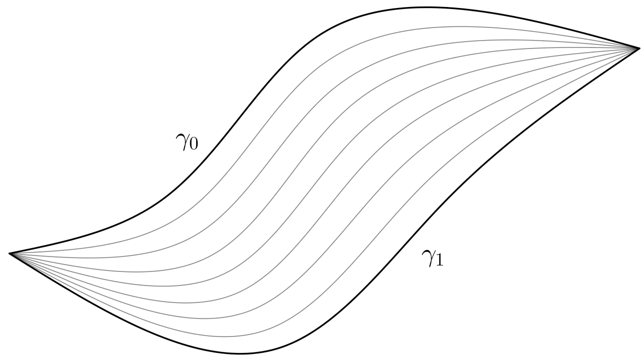


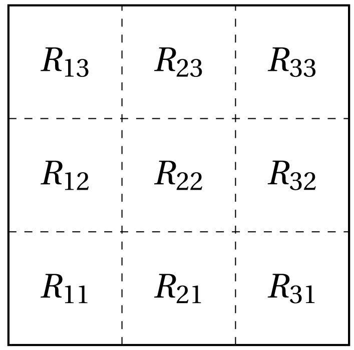
Figura III.4: Una homotopía con extremos fijos entre γ_0 y γ_1.

Fijamos una función continua $H : I \times I \longrightarrow \Omega$. Para demostrar el teorema anterior usamos nuevamente la noción de primitivas a lo largo de una función continua: una ***primitiva de f a lo largo de*** H es una función $F : I \times I \longrightarrow \Omega$ que cumple la siguiente condición: para cada $(s, t) \in I$ existe un entorno abierto U de $H(s, t)$ y una primitiva G de f en U tal que $G \circ H = F$ en un entorno de (s, t).

Proposición 3.3. *La función f admite primitivas a lo largo de H, y dos de ellas difieren en una constante.*

Demostración. El argumento es similar al que ya hicimos para un camino, pero ahora subdividimos al cuadrado $I \times I$ en cuadrados mas pequeños donde f admite primitivas locales, y luego, muy cuidadosamente, pegamos las primitivas para obtener una global.

Para cada punto de la imagen $H(I \times I)$ existe un disco que lo contiene, y en el que f admite una primitiva. La compacidad de $I \times I$ y la continuidad de H aseguran que existen finitos de estos discos que cubren a $H(I \times I)$ y, por la continuidad uniforme de H en $I \times I$, podemos subdividir a $I \times I$ en finitos rectángulos R_{ij} de forma que $H(R_{ij})$ está contenido en alguna de éstas finitos discos, que notamos B_{ij}. A las respectivas primitivas locales en esos discos las notamos F_{ij}, y asumimos que los R_{ij} están etiquetados de forma que se ubican en $I \times I$ como lo ilustra la figura siguiente en el caso que haya 9 de ellos.



La función F_{11} ciertamente es una primitiva de f a lo largo de $H|_{R_{11}}$, y B_{11} se interseca con B_{12} en un conjunto conexo no vacío, asi F_{12} difiere de F_{11} en una constante. Esto permite definir una primitiva de f a lo largo de H sobre $R_{11} \cup R_{12}$. Inductivamente, podemos definir una primitiva de f a lo largo de la primera columna de rectángulos $C_1 = R_{11} \cup \cdots \cup R_{1n}$, obteniendo una función que notamos F_1.

Hacemos ahora lo mismo para cada una de las finitas columnas para obtener funciones F_i que son primitivas de f a lo largo de la restricción de H a esa columna C_i de rectángulos. Podemos ahora repetir la misma idea para pegar a éstas primitivas: la columna de rectángulos C_1 se corta con la columna C_2 en un conjunto conexo no vacío, asi F_1 y F_2 difieren de una constante. Inductivamente, modificamos las restantes primitivas para obtener la primitiva deseada, definida en todo $I \times I$. ◀

Notemos que esto generaliza lo que ya hicimos para caminos: si H es una homotopía entre dos caminos γ_0 y γ_1 y si F es una primitiva de f a lo largo de H, entonces para cada $s \in I$ la función $t \longmapsto F(s,t)$ es una primitiva de f a lo largo de $t \mapsto \gamma_t(s)$, y para cada $t \in I$ la función $s \longmapsto F(s,t)$ es una primitiva de f a lo largo de $s \mapsto \gamma_t(s)$.

Las Figuras III.5 y III.6 ilustran el proceso de pegado inductivo que dimos en el teorema. Podemos dar ahora la

Demostración de la invarianza homotópica de la integral. Dada una homotopía $H : I \times I \longrightarrow \Omega$ de γ_0 a γ_1, sea $F : I \times I \longrightarrow \Omega$ una primitiva de f a lo largo de H. Como

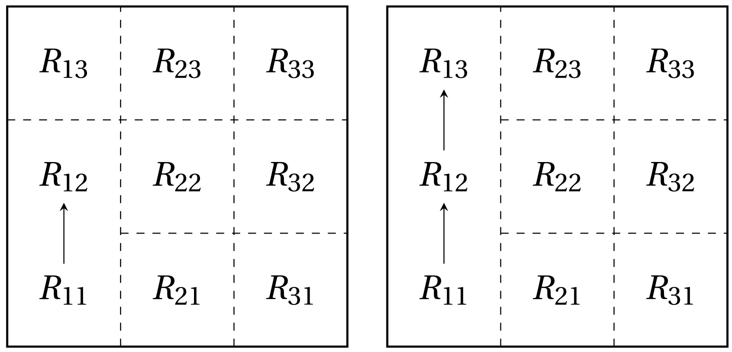


Figura III.5: El primer paso, donde obtenemos primitivas en las columnas.

$H(s,0) = \gamma_0(s)$ y $H(s,1) = \gamma_1(s)$, $F(s,0)$ y $F(s,1)$ son primitivas a lo largo de γ_0 y γ_1 de f, respectivamente, resulta que

$$\int_{\gamma_0} f\,dz = F(1,0) - F(0,0), \qquad\qquad \int_{\gamma_1} f\,dz = F(1,1) - F(0,1).$$

En el caso (a), como $H(0,t)$ y $H(1,t)$ son constantes para $t \in I$, lo mismo vale para F, y deducimos que $F(1,0) = F(1,1)$ y que $F(0,0) = F(0,1)$. En el caso (b), sea $H(0,t) = H(1,t) := \delta(t)$. Entonces tanto $F(0,t)$ como $F(1,t)$ son una primitivas de f lo largo de δ y luego

$$\int_{\delta} f\,dz = F(0,1) - F(0,0) = F(1,1) - F(1,0),$$

que completa la demostración del teorema. ◄

Ejercicio 3.1. Probar que todo camino continuo en Ω, no necesariamente suave a trozos, es homotópico a un camino suave a trozos en Ω.

El ejercicio anterior nos permite definir, de forma indirecta, la integral de $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ sobre caminos continuos arbitrarios y, en vista del teorema anterior, esta definición es compatible con la usual para caminos suaves.

Un lazo en Ω se dice ***nulhomotópico en*** Ω si es homotópico a un camino constante en Ω. Decimos que Ω es ***simplemente conexo*** si todo lazo en Ω es nulhomotópico. La siguiente proposición afirma que las funciones holomorfás “no ven” a

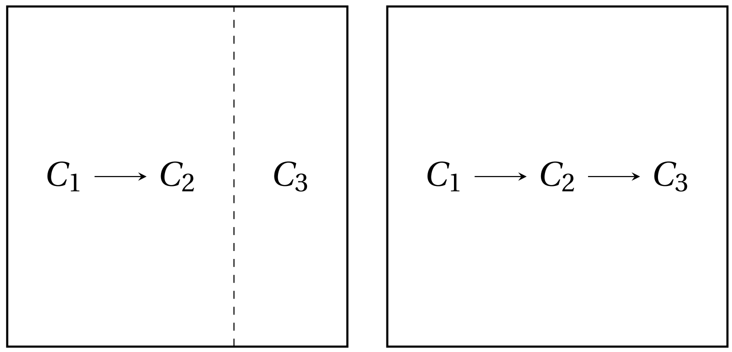


Figura III.6: El segundo paso, donde pegamos las primitivas obtenidas en cada columna a una en todo el cuadrado.

los caminos nulhomotópicos.

Corolario 3.4. *La integral de toda función holomorfa sobre un lazo nulhomotópico es nula.*

Demostración. En efecto, la integral de una función sobre un camino constante es evidentemente nula y, por el Teorema 3.2, lo mismo es cierto para todo camino homotópico a éste. ◄

Otra forma de enunciar lo anterior es la siguiente.

Corolario 3.5. *Si existe una función holomorfa que tiene integral no nula sobre un lazo, este camino no es nulhomotópico.*

Ya conocemos ejemplos de regiones simplemente conexas.

Proposición 3.6. *Toda región estelar es simplemente conexa.*

Demostración. Sea Ω una región estelar con centro c, y sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ un lazo en Ω. Consideremos la homotopía $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$ tal que

$$H(s,t) = t\gamma(s) + (1-t)c.$$

Entonces $H(s,0) = c$, el camino constante en c, $H(s,1) = \gamma(s)$, el lazo γ, y para cada s, el camino $H(s,t)$ es un lazo, pues se obtiene de γ por una traslación y una homotecia. Así H es una homotopía en Ω de γ a un lazo constante, como queríamos probar. ◀

Un lazo γ en Ω que asigna integral nula a toda función holomorfa sobre Ω se dice ***nulhomólogo.*** Resulta así que todo lazo nulhomotópico es nulhomólogo. Sin embargo, existen lazos en regiones de $\mathbb{C}$ que son nulhomólogos pero no nulhomotópicos, aunque por el momento no tenemos las herramientas disponibles para probar este fenómeno.

Capítulo IV

Teoremas fundamentales sobre funciones holomorfas

There is a certain principle of moderation in the theory of analytic functions which it is easy to sense but very hard to pin down and to express in exact terms. The reader may have noticed that orderly behavior has a way of propagating itself in this theory; thus, the existence of one derivative gave the existence of derivatives of all orders. A bound for the absolute value of $f(z)$ on the frontier of a domain of holomorphism is also a bound in the interior, and uniform convergence on the frontier implies uniform convergence in the interior. [...] All these theorems can be regarded as reflections of the principle of moderation: a function of modest rate of growth is allowed just so much freedom in its behavior or else…

Einar Hille en [8]

1. Control de las derivadas

1.1. Estimaciones de Cauchy

Fijemos una región Ω en $\mathbb{C}$ y una función holomorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Veamos que el crecimiento de las derivadas de f está controlado por ella.

Proposición 1.1. *Sea B un disco de radio r y centro c con clausura contenida en Ω y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

(1) Para cada $z \in B$ vale que $|f^{(n)}(z)| \leqslant r n! \dfrac{|f|_{\partial B}}{d(z)^{n+1}}$, donde $d(z)$ es la distancia de z al borde de B.

(2) Si $B' = B(c, r-s)$ con $0 < s < r$ entonces $|f^{(n)}|_{B'} \leqslant r n! \dfrac{|f|_{\partial B}}{s^{n+1}}$.

(3) Si $M(r) = |f|_{\partial B_r(c)}$, entonces $|a_n| r^n \leqslant M(r)$, donde $\sum_{n\geqslant 0} a_n (z-c)^n$ es el desarrollo en serie de potencias de f en torno a c.

Notemos que el tercero de los resultados nos da la constante M del lema de Abel que prueba que la serie de potencias de f en torno a c tiene radio de convergencia positivo.

Demostración. Fijemos $z \in B$ y $n \in \mathbb{N}$. Por la fórmula integral de Cauchy, tenemos que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

y luego la estimación estándar da la primera afirmación. En efecto, tenemos que

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{n!}{2\pi} 2\pi r |f|_{\partial B} \max_{\xi \in \partial B} |z - \xi|^{-n-1},$$

y $\max_{\xi\in\partial B} |z-\xi|^{-1} = \min_{\xi\in\partial B} |z-\xi|$ no es otra cosa que la distancia de z al borde de B. La segunda se deduce inmediatamente de la primera, pues en ese caso $s \leqslant d(z)$. Finalmente, para ver la tercera notamos que la segunda vale, en el caso que $z = c$, para todo $0 < s < r$. Haciendo que $s \longrightarrow r$, obtenemos lo que queremos, notando que $a_n = f^{(n)}(c)/n!$. Esto completa la demostración. ◀

Veamos que podemos obtener estimaciones del crecimiento de las derivadas de f no solo en discos compactos, como afirma el segundo ítem de la proposición anterior, si no en conjuntos compactos arbitrarios.

Teorema 1.2. *Sea K compacto contenido en Ω y sea L un entorno compacto de K contenido en Ω. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una constante M_n, que depende solo de Ω, K y L, tal que para toda función $f \in \mathscr{O}(\Omega)$,*

$$|f^{(n)}|_K \leqslant M_n |f|_L.$$

Demostración. Fijemos $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ y tomemos K y L como en el enunciado del teorema. Para cada punto $z \in K$ existen discos B', B con $\overline{B'} \subseteq B$ y $\overline{B} \subseteq L$, y una constante C_n, que depende de z y L tal que $|f^{(n)}|_{B'} \leqslant C|f|_{\partial B}$. Los discos B' asi obtenidos cubren a K, y luego existen finitos de ellos, digamos $B'_1, \ldots, B'_t$, que cubren a K. Dado que $|f|_{\partial B_i} \leqslant |f|_L$ para cada uno de los respectivos discos B_i, es suficiente elegir M_n como el máximo de las respectivas constantes $C_1, \ldots, C_t$ para obtener que

$$|f^{(n)}|_K \leqslant M_n |f|_L,$$

como afirma el teorema. ◀

1.2. El teorema de Liouville

Veamos una aplicación de la ***desigualdad de Cauchy***

$$|a_n| r^n \leqslant |f|_{\partial B_r(c)},$$

válida para toda función holomorfa en un entorno de c y cuya serie $\sum a_n (z-c)^n$ en torno a ese punto tiene radio de convergencia mayor a r, que obtuvimos en la Proposición 1.1.

Teorema 1.3. (Teorema de Liouville) *Toda función entera y acotada es constante.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ entera y acotada, y consideremos el desarrollo en serie de $f = \sum a_n z^n$, que sabemos converge en *todo* $\mathbb{C}$. Si M es tal que $|f| \leqslant M$, entonces para todo $r > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$ vale, por la desigualdad de Cauchy, que $|a_n|r^n \leqslant M$. Como $r > 0$ es arbitrario, deducimos que $a_n = 0$ si $n > 0$, y luego es el caso que $f = a_0$ es una función constante. ◀

Una aplicación interesante del teorema de Liouville es la siguiente.

Proposición 1.4. *La imagen de una función entera no constante es densa en* $\mathbb{C}$.

Demostración. Supongamos, por el absurdo, que existe un punto $w \in \mathbb{C}$ y un disco $B(w,r)$ de modo que $f(\mathbb{C}) \cap B(w,r) = \varnothing$. Esto implica que para todo $z \in C$ vale que $|f(z) - w| \geqslant r > 0$, o, lo que es lo mismo, que la función holomorfa

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

está acotada. Pero esto implica que g, y luego f, es constante, contra nuestra hipótesis. ◀

Esta proposición vaticina un resultado famoso de Émile Picard, que afirma que, de hecho, la imagen de cualquier función holomorfa no constante es, o bien todo $\mathbb{C}$, o bien $\mathbb{C}$ menos un punto. Ya conocemos ejemplos de esto: $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, mientras que $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \smallsetminus 0$.

El teorema de Liouville da una —entre muchas!— formas de probar que todo polinomio no constante con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene al menos una raíz compleja.

Teorema 1.5. *Todo polinomio no constante tiene una raíz compleja.*

Demostración. Sea p un polinomio en $\mathbb{C}[X]$, y supongamos que no tiene ninguna raíz. Entonces la función $f(z) = p(z)^{-1}$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Sin embargo, $|f(z)| \longrightarrow 0$ cuando $|z| \longrightarrow \infty$. Resulta que f es entera y acotada, y luego es constante. Deducimos que lo mismo es cierto para p, en contra de nuestra hipótesis. Esto prueba el teorema. ◀

2. Tres teoremas fundamentales

The values that an analytic function assume in the different parts of its domain of existence are related to each other: they are connected by analytic continuation and it is impossible to modify the values in one part without inducing change throughout. Therefore an analytic function can be compared to an organism the main characteristic which is exactly this: Action on any part calls forth a reaction of the entire system. — George Pólya y Gabor Szegö en [13].

En lo que sigue fijamos una región $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y una función holomorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

2.1. El teorema de la identidad

Ya sabemos que las funciones holomorfas son analíticas, y esto implica que heredan, esencialmente, todas las propiedades buenas que tienen las series de potencias convergentes. El siguiente teorema es el reflejo sobre las funciones holomorfas del hecho que una serie de potencias queda unívocamente determinada por sus coeficientes.

Teorema 2.1. (Teorema de la indentidad) *Sea g holomorfa en Ω. Son equivalentes,*

(1) $f = g$,

(2) El conjunto $C = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ *tiene un punto de acumulación en* Ω,

(3) Existe $c \in \Omega$ *tal que* $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Es trivial que (1) $\Longrightarrow$ (2). Si, por otro lado, c es un punto de acumulación de C en Ω, y digamos que (c_n) es una sucesión en $\Omega \smallsetminus c$ que tiende a c. Entonces ciertamente $f(c) = g(c)$. Podemos considerar ahora la serie de potencias $h = \sum a_n (z-c)^n$ de $f - g$. Por lo anterior $h(z) = (z-c)h_1(z)$ donde $h_1(c) = h'(c)$, y $h_1(c_n) = 0$ para todo n. Luego haciendo $n \to \infty$ es $h_1(c) = 0$. Continuando de esta manera, obtenemos que $h^{(n)}(c) = 0$ para cada natural $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, consideremos el conjunto

$$T = \left\{z \in \Omega : h^{(n)}(z) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Como cada derivada $h^{(n)}$ es continua, este conjunto es cerrado en Ω. Pero es también abierto en Ω: si $z_0 \in T$ y la serie de Taylor de h en z_0 converge en un disco $B \subseteq \Omega$, entonces ciertamente $B \subseteq T$. Si vale (3), entonces T es no vacío, y luego $T = \Omega$ en vista de la conexión de Ω. Esto implica que $f = g$. ◀

El teorema de la identidad asegura que para cada $c \in \Omega$, existen solo finitos $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(c) = 0$. Llamamos al primer $\mu \in \mathbb{N}_0$ tal que $f^{(\mu)}(c) \neq 0$ el ***orden de** f **en** c*, y lo notamos $o_c(f)$; esto define, para cada $c \in \Omega$, una función $o_c : \mathscr{O}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{N}_0$. Además, $o_c(f)$ coincide con el orden del desarrollo en serie de potencias de $f(z+c)$ en torno al origen, que definimos en el Capítulo II. Análogamente, definimos la ***multiplicidad de** f **en** w* como el número de raíces de $f(z) = f(c)$, y lo notamos $\mu(f,c)$.

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es la siguiente caracterización de las soluciones a la ecuación $f(z) = w$ para $w \in C$.

Teorema 2.2. (Fibras discretas) *Sea f no constante. Para cada $w \in \mathbb{C}$ el conjunto $f^{-1}(w) = \{z \in \Omega : f(z) = w\}$ es discreto en Ω y a lo sumo numerable.*

Llamamos a $f^{-1}(w)$ la ***fibra de** f **sobre** w*, que le da nombre a nuestro teorema. Ya conocemos un ejemplo de este fenómeno: el conjunto de soluciones de la ecuación $\exp z = 1$ es el subconjunto numerable y discreto $2\pi i\mathbb{Z}$ de $\mathbb{C}$.

Demostración. Fijemos $w \in \mathbb{C}$. Por definición, la fibra $F = f^{-1}(w)$ es un conjunto cerrado. Supongamos que c es un punto de acumulación de F. Entonces $c \in F$, y luego el conjunto donde f coincide con la función constante w tiene un punto de acumulación en Ω, y resulta f constante, contra nuestra hipótesis. Luego F es discreto.

Para ver que F es a lo sumo numerable, notemos que para todo compacto K en Ω, el conjunto $K \cap F$ es compacto y si es infinito, admite un punto de acumulación en K, que ya vimos es imposible. Luego $K \cap F$ es finito para cada compacto K de Ω, y esto implica que F es a lo sumo numerable, pues Ω puede expresarse como la union creciente de numerables compactos. Esto completa la demostración. ◀

Ejercicio 2.1. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\Omega_n = \{z \in \Omega : |z| \leqslant n \text{ y } d(z, \partial\Omega) \geqslant n^{-1}\}.$$

Probar que valen las siguientes propiedades:

(1) Ω_n es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \cdots$,

(3) $\Omega = \bigcup_{n \geqslant 1} \Omega_n$.

Obtener así una prueba de la última afirmación en la demostración anterior.

2.2. El teorema del módulo máximo

La siguiente ***fórmula de Gutzmer*** es un refinamiento de las desigualdades de Cauchy de la Proposición 1.1.

Proposición 2.3. *Supongamos que f tiene un desarrollo en serie de potencias*

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n (z-c)^n$$

en un entorno de c, que esta serie tiene radio de convergencia mayor a r, y sea $M(r) = |f|_{\partial B_r(c)}$. Entonces

$$\sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c + re^{it})|^2 dt \leqslant M(r)^2.$$

Demostración. Consideremos la función $g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(t) = f(c + re^{it})$, esto es

$$g(t) = \sum_{n \geqslant 0} a_n r^n e^{int}.$$

Por la fórmula integral de Cauchy, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{it}) e^{-int} dt = a_n r^n,$$

y luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(c+re^{it})|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\geqslant 0}\overline{a_n}f(c+re^{it})r^n e^{-int}\,dt \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{a_n}f(c+re^{it})r^n e^{-int}\,dt \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|a_n|^2 r^{2n},
\end{aligned}$$

donde el intercambio entre la integral y la suma está justificado por la convergencia normal de la serie que representa a f. Esto prueba la igualdad del enunciado, y la desigualdad derecha se deduce de la estimación estándar. ◀

De esta fórmula deducimos que para todo natural n vale la estimación de Cauchy $|a_n|r^n \leqslant M(r)$ —algo que ya sabiamos era cierto— pero deducimos además el siguiente corolario.

Corolario 2.4. *Si para algún $n \in \mathbb{N}$ es $|a_n|r^n = M(r)$, entonces $a_m = 0$ para todo $m \neq n$, y luego $f = a_n(z-c)^n$.*

Demostración. En efecto, si $|a_n|r^n = M(r)$ entonces $\sum_{n\neq\mu}|a_\mu|^2 r^{2\mu} \leqslant 0$, que fuerza que todos los términos que aparecen en esta suma sean nulos. ◀

Este corolario es todo lo que necesitamos para probar el próximo teorema fundamental sobre funciones holomorfas.

Teorema 2.5. (El teorema del módulo máximo) *Supongamos que existe $c \in \Omega$ y un entorno U de c tal que $|f(c)| = |f|_U$ —esto es, que c es un máximo local de Ω. Entonces f es constante en Ω.*

Demostración. En este caso el corolario anterior afirma que el desarrollo en serie de potencias de f en torno a c es la serie constante $f(c)$. Por el teorema de la identidad, resulta f constante en todo Ω. ◀

Corolario 2.6. (El teorema del módulo mínimo) *Supongamos que existe $c \in \Omega$ y un entorno U de c tal que $|f(c)| = \min_{z\in U} |f(z)|$. Si f no es constante, $f(c) = 0$.*

Demostración. Basta notar que si $f(c) \neq 0$, la funcion $g = 1/f$ es holomorfa en algun entorno $V \subseteq U$ de c, y tiene ahí un máximo local en c. ◀

El siguiente teorema es se deduce inmediatamente del Teorema 2.5.

Teorema 2.7. *Sea Ω una región acotada en $\mathbb{C}$, y sea $g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y holomorfa en Ω. Entonces el máximo de g en Ω ocurre en $\partial\Omega$.*

Demostración. Si g es constante, la afirmación es inmediata. Podemos asumir, entonces, que g no es constante. Como Ω es acotado, $\overline{\Omega}$ es compacto, así g asume su valor máximo en alguno de sus puntos. Por el teorema del módulo máximo, este punto no puede ser interior a $\overline{\Omega}$. ◀

Una consecuencia interesante de este teorema es el siguiente resultado, conocido ya por Weierstrass, sobre la "propagación de la convergencia uniforme".

Teorema 2.8. *Sea Ω una región acotada y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas sobre $\overline{\Omega}$ y holomorfas en Ω. Si la sucesión de restricciones $(f_n|_{\partial}\,\Omega)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre $\partial\Omega$ entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre $\overline{\Omega}$ a una función continua sobre $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω.*

El lector hará bien en demostrar el siguiente corolario, que usaremos más adelante.

Corolario 2.9. *Sea Ω una región, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω y D un subconjunto discreto de Ω. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre cada compacto de $\Omega \smallsetminus K$, de hecho converge uniformemente sobre cada compacto de Ω.*

2.3. El teorema de la aplicación abierta

El último de los tres teoremas sobre funciones holomorfas que queremos probar es el siguiente.

Teorema 2.10. (El teorema de la aplicación abierta) *La imagen de cualquier abierto de Ω bajo f es también un conjunto abierto.*

Nuestra demostración se basa en una idea similar a la demostración del Corolario 2.6.

Proposición 2.11. *Sea B un disco abierto con centro c y clausura contenida en Ω, y supongamos que* $\min_{z\in\partial B}|f(z)| > |f(c)|$. *Entonces f tiene un cero en B.*

Demostración. Supongamos que f no tiene ceros en B. Entonces $g = 1/f$ es una función holomorfa en un entorno de B, y luego por la desigualdad de Cauchy,

$$|g(c)| \leqslant \max_{z\in\partial B}|g(z)| = \left(\min_{z\in\partial B}|f(z)|\right)^{-1},$$

que va en contra de nuestra hipótesis. ◀

De lo anterior deducimos el siguiente corolario, que es una versión cuantitativa del teorema de la aplicación abierta: determina de forma precisa el tamaño de una bola contenida en $f(B)$ en torno a $f(c)$ en términos de los valores que asume f en ∂B.

Corolario 2.12. *Supongamos que* $2\delta := \min_{z\in\partial B}|f(z)-f(c)| > 0$. *Entonces* $f(B) \supseteq B(f(c),\delta)$.

Demostración. Consideremos un $b \in \mathbb{C}$ con $|f(c) - b| < \delta$. Si tomamos $z \in \partial B$, tenemos que

$$|f(z) - b| \geqslant |f(z) - f(c)| - |b - f(c) \geqslant \delta,$$

así $\min_{z\in\partial B}|f(z) - b| > |f(c) - b|$. La proposición anterior asegura que $b = f(z)$ para algún $z \in B$ y esto prueba lo que afirma el corolario. ◀

Podemos dar ahora la

Demostración del Teorema 2.10. Dado $c \in \Omega$, la hipótesis que f no es constante y el teorema de la identidad aseguran que existe una bola B con clausura contenida en Ω tal que $f(c) \notin f(\partial B)$: de lo contrario, existiría una sucesión de puntos, convergentes a c donde f toma siempre el valor $f(c)$. Resulta entonces que $\min_{z\in\partial B}|f(z) - f(c)| = 2\delta > 0$, y luego el corolario anterior implica que $f(B) \supseteq B(f(c),\delta)$, y esto es suficiente para probar que *todo* abierto de Ω tiene imagen abierta bajo f, como afirma nuestro teorema. ◀

Ejercicio 2.2. Dar una prueba la última afirmación que hicimos en la demostración anterior.

3. Extensión de funciones holomorfas

3.1. El teorema de continuación de Riemann

Una de las consecuencias del teorema de Goursat es que una función que es holomorfa en toda una región Ω salvo, posiblemente, un punto de ella, es de hecho holomorfa en todo Ω. Veamos un refinamiento de este hecho, atribuído a Bernhard Riemann.

Fijemos una región Ω en $\mathbb{C}$ y una función $f : \Omega \smallsetminus c \longrightarrow \mathbb{C}$. Si f es continua, decimos que f se ***extiende de forma continua sobre*** Ω si existe una función continua definida en Ω que se restringe a f en $\Omega \smallsetminus c$. El lector puede deducir que significa que f se ***extiende de forma holomorfa sobre*** Ω reemplazando todas las instancias de la palabra “continua” por la palabra “holomorfa” en la oración anterior.

Teorema 3.1. (Teorema de continuación de Riemann) *Si f es holomorfa, son equivalentes:*

(1) *f se extiende de forma holomorfa sobre Ω,*

(2) *f se extiende de forma continua sobre Ω,*

(3) *f está acotada en un entorno de c,*

(4) $\lim_{z\to c}(z-c)f(z) = 0$.

Demostración. Está claro que $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4)$. Veamos que $(4) \implies (1)$. Sin perder generalidad, podemos asumir que $c = 0$. Consideremos las funciones g y h tal que $g(z) = zf(z)$ si $z \in \Omega \smallsetminus 0$ y $g(0) := 0$, y $h(z) = zg(z)$.

Dado que g es continua en 0 por hipótesis, la función h es derivable en 0, y $h'(0) = g(0) = 0$, así h es holomorfa en todo Ω, y en particular admite un desarrollo en series de potencias centrado en 0. Como $h(0) = h'(0) = 0$, este desarrollo es de la forma

$$h(z) = z^2(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots) = z^2 h_1(z)$$

y la serie de potencias $h_1(z)$ es la extensión holomorfa de f buscada en un entorno del origen. ◀

Notemos que lo anterior prueba que la misma conclusión es válida si asumimos que f es holomorfa en todo Ω salvo, posiblemente, en un subconjunto discreto D de puntos de Ω, donde la condición (4) vale para cada $c \in D$.

3.2. Singularidades en la frontera

Fijemos una función analítica $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. En cada punto c de Ω, f admite entonces una representación como serie de potencias que converge en algún disco B contenido en Ω. Puede suceder, sin embargo, que esta serie de potencias tenga un radio de convergencia mayor, y luego que f esté bien definida en algún abierto que contiene propiamente a Ω. Diremos que f tiene un ***punto singular*** en $c \in \partial\Omega$ si no existe una serie de potencias g definida en un entorno B de c que coincide con f en $\Omega \cap B$.

Proposición 3.2. *Supongamosque Ω es un disco $B = B(c,r)$ y que el desarrollo en serie de potencias de f en torno a c tiene radio de convergencia exactamente r. Entonces f tiene necesariamente un punto singular en ∂B.*

En este sentido, el radio de convergencia $R_f(c)$ detecta la singularidad más próxima de f a c.

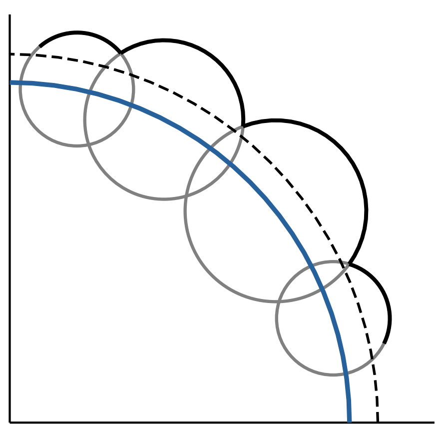


Figura IV.1: Podemos agrandar el radio de convergencia de f.

Demostración. Supongamos que ninguún punto de ∂B es singular para f, y veamos que la serie de potencias de f en torno a c converge en un disco con centro c y estrictamente más grande que B. Por hipótesis, para cada $z \in \partial B$ existe un disco B_z en torno a z y una función holomorfa que coincide con f en $B_z \cap B$. Como ∂B es compacto, existen finitos discos, que renombramos $B_1, \dots, B_n$, que cubren a ∂B. En cada disco B_i tenemos la correspondiente función holomorfa que notamos g_i. Podemos asumir que entre estos finitos discos ninguno está contenido en otro, pues si es el caso podemos descartar el más pequeño, y los restantes son también un cubrimiento de B.

Por el teorema de la identidad, si $B_i \cap B_j$ es no vacío, $g_i = g_j$ en tal intersección. Tiene entonces sentido que definamos una función

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in B, \\ g_i(z) & \text{si } z \in B_i. \end{cases}$$

Esta función es holomorfa en $\Omega = B \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n$ y, por el Teorema III.2.8, su serie de potencias en torno a c converge en cualquier disco contenido en esta unión. Pero por construcción —como se aprecia en la Figura IV.1— $d(c, \partial\Omega) > r$, y esto contradice que r es el radio de convergencia de f en c, y completa la demostración de la proposición. ◂

Ejercicio 3.1. Probar de modo más formal que, en la demostración anterior, la distancia de c al borde de Ω es estrictamente mayor a r.

4. Funciones biholomorfas

Recordemos que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y Ω es una región. Diremos que una función holomorfa $g : \Omega \longrightarrow \Omega'$ es biholomorfa si es biyectiva y su inversa es también holomorfa. Diremos que g es localmente biholomorfa en $c \in \Omega$ si es biholomorfa en un entorno de c contenido en Ω.

4.1. Raíces e inyectividad local

Proposición 4.1. *Sea $c \in \Omega$, y supongamos que el orden de f en c es n. Entonces existe una única función holomorfa $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z-c)^n g(z)$ y $g(c) \neq 0$.*

Demostración. La expresión de f en términos de g prueba su unicidad, si existe. Para ver la existencia de g, notemos que la función $g(z) = (z-c)^{-n} f(z)$ es holomorfa en $\Omega \smallsetminus c$. Además, por la forma en que elegimos n, g es continua en c. Por el teorema de continuación de Riemann, g es holomorfa en Ω, y además $n! g(c) = f^{(n)}(c) \neq 0$. ◀

Corolario 4.2. *Supongamos que B es un disco con centro c y clausura contenida en Ω y que la única raíz de f en $\overline{B}$ es c. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = o_c(f).$$

Demostración. Escribamos $f = (z-c)^n g$ donde $n = o_c(f)$ y g no se anula en c. Como c es la única raíz de f en c, g no se anula en ningún punto de $\overline{B}$, y luego no lo hace en un entorno que contiene a $\overline{B}$. Por otro lado,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-c} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

así resulta que,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{1}{z-c}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz.$$

Sin embargo la última integral se anula, pues $g'(z)/g(z)$ es holomorfa en algún disco convexo $B' \supseteq \overline{B}$ contenido en Ω. Obtenemos así la fórmula del enunciado. ◀

El siguiente lema muestra, por un lado, que el cociente incremental de f tiende de forma uniforme a $f'(c)$ y, por otro, que f es localmente inyectiva si su derivada no se anula.

Lema 4.3. *Sea B un disco con centro c y clausura contenida en Ω. Para cada par de* *números distintos* $z, w \in B$,

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-f'(c)\right| \leqslant |f'-f'(c)|_B.$$

En particular, si $f'(c) \neq 0$ *y si* B *es tal que* $|f'-f'(c)|_B < |f'(c)|$, f *es inyectiva en* B.

Demostración. La primera estimación se sigue de que

$$f(z)-f(w)-f'(c)(z-w) = \int_{[z,w]} (f'(\xi)-f'(c))\,d\xi,$$

y la estimación estándar. Dejamos el cálculo ya rutinario a manos del lector. Para ver la segunda afirmación, notemos que $f'(c) \neq 0$ podemos elegir B para que $|f'-f'(c)|_B < |f'(c)|$ pues f' es continua. Si $z \neq w$ están en B pero $f(z) = f(w)$, la primera parte del lema implica que $|f'(c)| < |f'(c)|$, que ciertamente es imposible. Así f es inyectiva en B, como dijimos. ◀

4.2. Criterio de biholomorfía

Teorema 4.4. *Supongamos que* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *es inyectiva. Entonces* $f(\Omega) = \Omega'$ *es una región y* f' *no se anula en* Ω. *Además,* $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ *es biholomorfa y si* g *es su inversa*

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$$

para todo $w \in \Omega'$.

Demostración. Como f es inyectiva, en particular no es constante, y por el teorema de la aplicación abierta, Ω' es una región. Además, la inversa $g : \Omega' \longrightarrow \Omega$ es continua, pues f es abierta.

Como f es inyectiva, f' no puede anularse idénticamente en ningún disco de Ω, así nuevamente por el teorema de la identidad se anula en un conjunto N cerrado y discreto de Ω. Como f es abierta, $f(N) = M$ es también cerrado y discreto en Ω'.

Tomemos ahora $w \in \Omega' \smallsetminus M$ y sea $z = g(w)$. Como f es derivable en z, existe f_1

continua tal que $f_1(z) = f'(z) \neq 0$ y

$$f(\xi) = f(z) + (\xi - z) f_1(\xi).$$

Esto nos permite escribir, para $\xi = g(\eta)$ y $g_1 = f_1 \circ g$,

$$\eta = w + (g(\eta) - g(w)) g_1(\eta).$$

Como $g_1(w) = f'(g(w)) \neq 0$, existe un entorno de w donde

$$g(\eta) - g(w) = g_1(\eta)^{-1}(\eta - w),$$

que prueba que g es derivable en w y $g'(w) = f'(g(w))^{-1}$.

Resulta que g es holomorfa en $\Omega' \smallsetminus M$ y continua en Ω' y luego, por el teorema de continuación de Riemann, es holomorfa en todo Ω'. Además, vale que $g'(w) f'(g(w)) = 1$ para todo $w \in \Omega' \smallsetminus M$. Por el teorema de la identidad, esto es cierto es todo Ω, así $f' \neq 0$ en todo Ω. Esto completa la demostración del teorema. ◀

Veamos ahora una resultado análogo para funciones holomorfas al teorema de la función inversa del análisis elemental.

Teorema 4.5. *Una condición necesaria y suficiente para que f sea localmente biholomorfa en un punto $c \in \Omega$ es que $f'(c) \neq 0$.*

Demostración. Si $f'(c) \neq 0$, el Lema 4.3 asegura que existe un disco B con centro c y contenido en Ω donde f es inyectiva. El Teorema 4.4 implica que f es biholomorfa en B. Está claro, por otro lado, que si f es biholomorfa en un entorno de c, entonces $f'(c) \neq 0$, como vimos en la demostración del Teorema 4.4. ◀

4.3. Forma local normal

El siguiente teorema nos da una escritura canónica local para f, que usaremos enseguida para ver que, salvo un cambio de coordenadas holomorfo, f se comporta como la función $z \longmapsto z^m$ en un punto $c \in \Omega$ donde $m = \mu(f, c)$.

Teorema 4.6. *Supongamos que $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ es holomorfa y no constante y tomemos $c\in\Omega$. Existe un disco $B\subseteq\Omega$ con centro c y una función biholomorfa $h:B\longrightarrow B'$ tal que*

$$f=f(c)+h^m \text{ en } B,$$

donde $m=\mu(f,c)$. Además, tal escritura es única, en el sentido que si $\tilde B$ es otro disco con centro en c y si $\tilde h:\tilde B\longrightarrow\tilde B'$ es holomorfa, $\tilde h'(c)\neq 0$ y existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$f=f(c)+\tilde h^n \text{ en } \tilde B, \tag{IV.1}$$

entonces $m=n$ y existe una raíz m-ésima de la unidad ζ tal que $h=\zeta\tilde h$ en $B\cap\tilde B$.

Llamamos al término derecho de (IV.1) una ***forma local normal de f en c***.

Demostración. Para ver que tal escritura de f existe, escribamos $f(z)=f(c)+(z-c)^m g(z)$ donde g es holomorfa y no se anula en un disco con centro en c. Como este disco es convexo, g admite allí un logaritmo por el Corolario III.2.5, y luego admite, en particular, una raíz m-ésima q. Si ponemos $h=(z-c)q$ entonces $h'(c)=q(c)\neq 0$, pues $q(c)^n=g(c)\neq 0$, así podemos elegir un disco B posiblemente más pequeño donde h es biholomorfa, y donde $f=f(c)+h^n$, como queríamos.

Para ver que tal escritura es única, tomemos $\tilde B$, n y $\tilde h$ como en el enunciado del teorema. Como tanto h como $\tilde h$ tienen orden 1 en c, h^m tene orden m en c y $\tilde h^n$ tiene orden n en c, y como coinciden en $B\cap\tilde B$, $n=m$. Finalmente, como h y $\tilde h$ son ambas raíces m-ésimas de $f-f(c)$, deducimos que $h=\zeta\tilde h$ para alguna raíz m-ésimas de la unidad, que completa la demostración del teorema. ◀

Podemos ahora enunciar precisamente y probar la afirmación que hicimos al comienzo de esta sección.

Teorema 4.7. *Para cada $c\in\Omega$ existe un entorno U de c en Ω, un disco V con centro $f(c)$ y funciones $u:U\longrightarrow\mathbb{E}$, $v:\mathbb{E}\longrightarrow V$ tal que*

(1) u es biholomorfa y $u(c)=0$,

(2) v es lineal y $v(0)=f(c)$,

(3) $f(U) = V$ *y*

(4) $f : U \longrightarrow V$ *se factoriza como*

$$U \xrightarrow{u} \mathbb{E} \xrightarrow{z \longmapsto z^m} \mathbb{E} \xrightarrow{v} V$$

donde $m = \mu(f, c)$.

Demostración. Por el Teorema 4.6 existe un disco B con centro en c y una función biholomorfa $h : B \longrightarrow h(B)$ tal que $f = f(c) + h^m$ en B. Como h se anula en c, existe un disco $B(0, r)$ contenido en $h(B)$. Ponemos $U = h^{-1}(B(0, r))$, $u = r^{-1}h$, $V = B(f(c), r^n)$ y $v : \mathbb{E} \longrightarrow V$ tal que $v(z) = r^n z + f(c)$, el entorno U y las funcione u y v tienen las propiedades deseadas. ◀

5. Continuación analítica y monodromía

Completar.

Capítulo V

Teoría de Cauchy general

1. Lazos nulhomólogos y la fórmula integral

En el Teorema III.2.1 probamos la fórmula de Cauchy (III.1) para $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y B un disco con clausura contenida en Ω. La demostración dependió, por un lado, de que conocíamos el valor de la integral

$$I(\partial B, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{d\xi}{\xi - z}d\xi \tag{V.1}$$

para $z \in B$ —de hecho, conocemos su valor para todo $z \notin \partial B$— y, por otro, de que toda función holomorfa en un conjunto estelar admite una primitiva.

Si queremos obviar el cálculo de $I(\partial B, z)$ en nuestra demostración, podemos escribir el resultado final como

$$I(\partial B, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi. \tag{V.2}$$

para $z \notin \partial B$, que da una foŕmula integral para f, aunque depende también de $I(\partial B, z)$.

Sin embargo, sabemos que existen regiones Ω y funciones holomorfas en Ω que no admiten primitivas allí. Por ejemplo, esto es cierto si $\Omega = \mathbb{C}^*$ y $f(z) = z^{-1}$. También vimos que esta función no satisface la fórmula de Cauchy en cualquier disco que contenga a 0 en su interior.

El objetivo de esta sección es dar respuesta a las siguientes preguntas. Dada una región Ω en $\mathbb{C}$,

Problema 1. ¿Podemos caracterizar a los lazos γ en Ω para los cuales

$$\int_\gamma f\,dz = 0$$

para toda $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, es decir, todos los lazos nulhomólogos en Ω?

Problema 2. ¿Podemos caracterizar a los lazos γ en Ω para los cuales vale la fórmula de Cauchy (V.2) para toda $f \in \mathscr{O}(\Omega)$?

1.1. El índice como función de lazos

Al desarrollar la teoría de Cauchy para discos, usamos continuamente que el interior topológico de una disco coincide con nuestra noción geométrica usual del "interior" de una curva cerrada simple. Veamos como extender esto de forma consistente a lazos arbitrarios.

Sea $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ un lazo en C, donde $I = [0,1]$ es el intervalo unidad. Para cada punto $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \gamma$, el ***índice de*** γ ***respecto de*** z es

$$\operatorname{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Solemos llamar a este número el ***número de giros de*** γ ***repecto a*** z, por razones que serán evidentes al final de esta sección.

Dado que el número de giros de z en torno a γ coincide con el número de giros de $\gamma - z$ en torno al origen, fijaremos en todo lo que sigue un lazo $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, y escribiremos $\operatorname{Ind}(\gamma)$ a $\operatorname{Ind}(\gamma, 0)$.

Lema 1.1. *Existen funciones* $\Gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ *tal que* $\exp \Gamma = \gamma$. *En tal caso, para cualquiera de ellas*

$$\operatorname{Ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}(\Gamma(1) - \Gamma(0)).$$

En particular, $\operatorname{Ind}(\gamma)$ *es un número entero.*

Demostración. Basta que tomemos Γ una primitiva de $g(\xi) = \xi^{-1}$ a lo largo de γ. En este caso, $\Gamma(1) - \Gamma(0)$ es la diferencia de dos ramas del logartimo en un entorno de $\gamma(1)$, así tal número es un múltiplo entero de $2\pi i$. ◂

Veamos ahora algunas propiedades de la función Ind.

Teorema 1.2. *La función* $\operatorname{Ind} : \operatorname{PS}(\mathbb{C} \smallsetminus 0) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *tiene las siguientes propiedades.*

(1) Si $\delta \in \operatorname{PS}(\mathbb{C} \smallsetminus 0)$ *es homotópico como lazo a* γ, *entonces* $\operatorname{Ind}(\gamma) = \operatorname{Ind}(\delta)$.

(2) Si γ *es el producto puntual de dos lazos* δ_1 *y* δ_2 *en* $\operatorname{PS}(\mathbb{C} \smallsetminus 0)$, *entonces*

$$\operatorname{Ind}(\gamma) = \operatorname{Ind}(\delta_1) + \operatorname{Ind}(\delta_2).$$

(3) Si γ es el lazo $t \longmapsto e^{2\pi i t}$ entonces $\operatorname{Ind}(\gamma) = 1$.

Demostración. La primera proposición se sigue inmediatamente de que $z \longmapsto z^{-1}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ y del Teorema III.3.2. Para ver la segunda afirmación, sean $\Gamma_1, \Gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\exp \Gamma_i = \delta_i$ para $i \in \{1,2\}$. Entonces $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ cumple que $\exp \Gamma = \gamma$, y deducimos la afirmación del Lema 1.1. La última proposición es un cálculo que ya hemos hecho. ◄

Corolario 1.3. *La función* $\operatorname{Ind} : \operatorname{PS}(\mathbb{C} \smallsetminus 0) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *es sobreyectiva, esto es, para cada entero n existen lazos con n giros en torno a al origen.*

Demostración. En efecto, el lazo que es el producto de $t \longmapsto e^{2\pi i t}$ con el mismo n veces es, por la tercera propiedad del teorema, o por un cálculo directo, un lazo con n giros en torno al origen. ◄

Veamos ahora que vale el recíproco de la propiedad (1).

Teorema 1.4. *Si $\gamma, \delta : I \longrightarrow \mathbb{C} \smallsetminus 0$ son lazos con el mismo número de giros en torno al origen, son homotópicos como lazos en* $\mathbb{C} \smallsetminus 0$.

Demostración. Podemos suponer, que γ y δ tienen el mismo punto inicial y que tal punto es el 1: $\gamma(0)^{-1}\gamma$ es homotópico a γ y $\delta(0)^{-1}\delta$ es homotópico a δ.

Tomemos $\Gamma, \Delta : I \longrightarrow \mathbb{C}$ dos caminos tal que $\exp \Gamma = \exp \Delta$. Entonces $\Gamma(0)$ y $\Delta(0)$ son un múltiplo de $2\pi i$ y, reemplazando a Γ y Δ por $\Gamma - \Gamma(0)$ y $\Delta - \Delta(0)$, respectivamente, podemos asumir que Γ y Δ son caminos que comienzan en el origen.

Como δ y γ tienen el mismo número de giros en torno al 0, resulta que $\Gamma(1) = \Delta(1)$. Así Γ y Δ son caminos en $\mathbb{C}$ con el mismo punto inicial y final. Dado que $\mathbb{C}$ es convexo, son homotópicos como caminos con extremos fijos; sea pues G una homotopía de Γ a Δ con extremos fijos. Es inmediato entonces que $H = \exp G$ es una homotopía de lazos entre γ a δ. ◄

Corolario 1.5. *Las propiedades* (1) – (3) *del Teorema 1.2 caracterizan a la función* $\operatorname{Ind} : \operatorname{PS}(\mathbb{C} \smallsetminus 0) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *unívocamente.*

Demostración. Sea $J : \operatorname{PS}(\mathbb{C} \smallsetminus 0) \longrightarrow \mathbb{Z}$ una función con las propiedades (1) – (3). Para cada $n \in \mathbb{Z}$ escribamos γ_n al lazo tal que $\gamma_n(t) = \exp(2\pi i n t)$. Si vale (3), entonces en vista de (2), deducimos que $J(\gamma_n) = J(\gamma_1^n) = nJ(\gamma_1) = n$. Por el Teorema 1.4, si γ es un camino con n giros en torno al origen, entonces γ es homotópico a γ_n, así por (1) resulta que $J(\gamma) = J(\gamma_n) = \operatorname{Ind}(\gamma)$. Esto completa la demostración del teorema. ◀

Notemos que las siguientes propiedades son válidas, y se siguen de las propiedades usuales de las integrales de línea que ya probamos.

Proposición 1.6. *Si γ es una concatenación de lazos γ_1 y γ_2 y si γ^* es el lazo opuesto a γ, entonces*

$$\operatorname{Ind}(\gamma) = \operatorname{Ind}(\gamma_1) + \operatorname{Ind}(\gamma_2), \qquad \operatorname{Ind}(\gamma^*) + \operatorname{Ind}(\gamma) = 0.$$

1.2. El índice como función de puntos

Consideremos ahora la función $\operatorname{Ind}_\gamma : z \in \mathbb{C} \smallsetminus \gamma \longmapsto \operatorname{Ind}(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.7. *La función $\operatorname{Ind}_\gamma$ es continua, y luego constante sobre cada componente conexa de $\mathbb{C} \smallsetminus \gamma$. Además, existe una única componente de $\mathbb{C} \smallsetminus \gamma$ que es no acotada, y allí $\operatorname{Ind}_\gamma$ se anula.*

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \gamma$ y sea B un disco tal que $d(B, \gamma) = s > 0$. Si $w \in B$, un cálculo directo muestra que

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) - \operatorname{Ind}_\gamma(w) = \frac{w - z}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{(\xi - z)(\xi - w)}$$

y luego por la estimación estándar

$$\left| \operatorname{Ind}_\gamma(z) - \operatorname{Ind}_\gamma(w) \right| \leqslant L(\gamma) \frac{|w - z|}{2\pi} s^{-2}.$$

Dado que s y $L(\gamma)$ están ambos fijos, esto prueba la continuidad de $\operatorname{Ind}_\gamma$. Como $\mathbb{Z}$ es discreto, resulta que $\operatorname{Ind}_\gamma$ debe ser continua en cada componente conexa de su dominio.

Sea ahora $R > 0$ tal que $B(0, R)$ contiene a γ: esto es posible pues γ es compacta, y tomemos un z con $|z| > R$. Como $\xi \longmapsto (\xi - z)^{-1}$ es holomorfa en $B(0, R)$, resulta que $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$. Además, el conjunto $B(0,R)^c$ es conexo, asi está contenido en la componente donde Ind_γ se anula, y luego esta componente es ella misma no acotada. ◂

Definimos el ***exterior de*** γ y el ***interior de*** γ por

$$\mathrm{Ext}\,(\gamma) = \mathrm{Ind}_\gamma^{-1}(0), \qquad \mathrm{Int}\,(\gamma) = \mathrm{Ind}_\gamma^{-1}(\mathbb{Z} \smallsetminus 0)$$

respectivamente. La proposición anterior prueba que el exterior de γ es conexo y no acotado, y que el interior de γ es acotado, y es la unión de numerables componentes conexas.

1.3. Caracterización de los lazos nulhomólogos

Probaremos ahora el siguiente teorema, que da una caracterización de los lazos nulhomólogos tanto en términos analíticos como geométricos.

Teorema 1.8. *Las siguientes afirmaciones sobre un lazo γ en una región Ω son equivalentes.*

(1) El lazo γ es nulhomólogo en Ω,

(2) El interior de γ está contenido en Ω,

(3) Para toda $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ vale la fórmula integral

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \tag{V.3}$$

Demostración. Si vale (1) y si f es holomorfa en Ω, consideramos como antes el cociente

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \text{ para } \xi \in \Omega \smallsetminus \{z\} \qquad \text{y} \qquad g(z) = f'(z),$$

que define una función holomorfa en Ω. Integrando a g sobre γ obtenemos la fórmula que aparece en (3). Supongamos, por otro lado, que vale (3). Dada $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ tomemos $z \notin \gamma$, y consideremos la función holomorfa $g(\xi) = (\xi - z) f(\xi)$. Aplicando la fórmula de Cauchy en g obtenemos que

$$\int_\gamma f\,dz = 0.$$

Por otro lado, si vale (1) y si tomamos $z \notin \Omega$, la función $h(\xi) = (\xi - z)^{-1}$ es holomorfa en Ω, y luego su integral sobre γ es cero. Así $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$, y el interior de γ está contenido en Ω.

Para ver que (3) $\implies$ (1), fijemos $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ y consideremos la función $g : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$g(\xi, z) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \text{ para } \xi \neq z \qquad \text{y} \qquad g(z, z) = f'(z),$$

Esta función es continua en todo puno (ξ, z) de $\Omega \times \Omega$ con $\xi \neq z$. Veamos que es también continua en cada punto de la forma $(c, c) \in \Omega$. En efecto, tomemos un disco B en Ω con centro en c. Podemos escribir para $z, w \in B$

$$g(z, w) - g(c, c) = \frac{1}{z - w} \int_{[z,w]} (f'(\xi) - f'(c))\,d\xi,$$

y un uso de la estimación estándar prueba que $g(z, w) \to g(c, c)$ cuando $|z - c|$ y $|z - w| \to 0$.

Notemos ahora que la afirmación (1) es equivalente a que

$$\int_\gamma g(\xi, z)\,d\xi = 0 \text{ para } z \in \Omega \smallsetminus \gamma.$$

Por lo que probamos en el párrafo, resulta por la Proposición III.2.10 que la función $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$h(z) = \int_\gamma g(\xi, z)\,d\xi$$

es holomorfa. Veamos que h se extiende a una función entera $H : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que tiende a cero en ∞, por lo que resultará identicamente nula por el teorema de

Liouville. En efecto, consideremos primero la función $h_1 : \operatorname{Ext}(\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$h_1(z) = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Esta función es holomorfa, y la estimación estándar y la no acotación de $\operatorname{Ext}(\gamma)$ prueban que $h_1(\infty) = 0$. Además, h_1 y h coinciden en $\operatorname{Ext}(\gamma) \cap \Omega$, y la hipótesis que $\operatorname{Int}(\gamma) \subseteq \Omega$ implica que $\mathbb{C} = \Omega \cup \operatorname{Ext}(\gamma)$. Podemos definir entonces en $H : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$H(z) = \begin{cases} h(z) & \text{si } z \in \Omega, \\ h_1(z) & \text{si } z \in \operatorname{Ext}(\gamma). \end{cases}$$

Como $H(\infty) = 0$ y como H es entera, el teorema de Liouville asegura que H es idénticamente nula, como queríamos. ◀

Esta demostración elemental de la implicación (3) $\implies$ (1) fue presentada por John D. Dixon en 1971 su artículo [6] , y se ha hecho muy popular en varios libros de Análisis Complejo modernos, como lo son el de Remmert [14], el de Serge Lang [10], el de Robert B. Ash y W. P. Novinger, y el de Robin Dyer y David Edmunds.

2. Regiones homológicamente simplemente conexas

2.1. Raíces y logaritmos holomorfos

Una región Ω en $\mathbb{C}$ es homológicamente simplemente conexa si todo lazo en Ω es nulhomólogo. Por su estrecha relación con esta propiedad, como veremos en la sección siguiente, estudiamos ahora a las raíces y los logaritmos holomorfos de funciones holomorfas en Ω.

Fijemos una función holomorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, y supongamos que f es nunca nula. Un ***logaritmo holomorfo de f en Ω*** es una función holomorfa g en Ω tal que $\exp g = f$. La existencia de tal función implica, en particular, que f no se anula en Ω. En este caso, la regla de la cadena prueba que $g' = f'/f$ —llamamos al cociente f'/f la ***derivada logaritmica de f***.

Proposición 2.1. *La función f admite un logaritmo holomorfo en Ω si y solamente si su derivada logarítmica es integrable en Ω.*

Demostración. Por lo anterior, si $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es un logaritmo holomorfo de f en Ω, es una primitva de f'/f. Recíprocamente, supongamos que f'/f admite como primitiva a $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. La función $G = f \exp(-g)$ es tal que

$$G' = f' \exp(-g) + f \exp(-g)(-f/f') = 0,$$

así es constante: existe $\lambda \in \mathbb{C}$, necesariamente no nulo, tal que $f = \lambda \exp g$. Si tomamos ahora μ tal que $\lambda = \exp \mu$, la función $g + \mu$ resulta un logaritmo holomorfo de f en Ω. ◀

Por la proposición anterior, deducimos el siguiente corolario.

Corolario 2.2. *Si Ω es homológicamente simplemente conexa, toda función holomorfa en Ω admite un logaritmo holomorfo.*

Sea $n \in \mathbb{N}$. Una función holomorfa $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice una ***raíz n-ésima holomorfa de f en Ω*** si $h^n = f$.

Proposición 2.3. *Supogamos que $f \neq 0$. Si $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima holomorfa de f en Ω, entonces*

$$h, \zeta h, \ldots, \zeta^{n-1} h$$

son todas ellas, donde ζ es una raíz n-ésima primitiva de la unidad.

Demostración. Como f es no nula, podemos elegir un disco abierto B donde f no se anula nunca, y luego lo mismo vale para h. Si $\tilde{h}$ es otra raíz holomorfa de f, entonces $\tilde{h}h^{-1}$ toma valores en el conjunto de raíces n-ésimas de la unidad y, en vista de que Ω es conexo, debe ser constante: existe $k \in \{0, \ldots, n\}$ y una raíz primitiva n-ésima de la unidad ζ tal que $\tilde{h} = \zeta^k h$, como dijimos. ◀

Una ***unidad*** en $\mathscr{O}(\Omega)$ es una función f que admite una inversa multiplicativa. Evidentemente esto es otra forma de decir que f no se anula sobre Ω.

Proposición 2.4. *Toda unidad en* $\mathcal{O}(\Omega)$ *que admite logaritmos holomorfos admite raíces* n*-ésimas holomorfas para todo* $n \in \mathbb{N}$. *En particular, si* Ω *es homológicamente simplemente conexo y* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *es una unidad, admite raíces* n*-ésimas holomorfas para todo* $n \in \mathbb{N}$.

La segunda afirmación de la siguiente proposición generaliza el hecho que el número de giros de un lazo respecto a un punto es un entero. Veremos como interpretarla de forma más concreta en el Capítulo VI.

Teorema 2.5. *Sea* f *nunca nula en* Ω *y sean* $z, c \in \Omega$. *Para todo camino* γ *en* Ω *que une* z *con* c,

$$\frac{f(z)}{f(c)} = \exp \int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi$$

y, en particular, si γ *es un lazo, la integral*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi$$

es un entero.

Demostración. Sea $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ y $F : I \longrightarrow \mathbb{C}$ una primitiva de f'/f a lo largo de γ. Entonces

$$\exp \int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \frac{\exp F(1)}{\exp F(0)} = \frac{f(z)}{f(c)}$$

pues F es, en un entorno de z y en uno de c, un logaritmo holomorfo de f. La segunda afirmación se deduce inmediatamente de la primera. ◂

El siguiente resultado prueba que si en una región existen “suficientes” raíces holomorfas de una función, entonces necesariamente admite un logaitmo holomorfo. El lector puede compararlo con la fórmula

$$\log t = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{t^{1/n} - 1}{n},$$

válida para $t > 0$, ya conocida por Leonhard Euler (1707–1783).

Teorema 2.6. *Sea M un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ y supongamos que f no se anula idénticamente en Ω. Si f admite una raíz n-ésima holomorfa para cada $n \in M$, f admite un logaritmo holomorfo en Ω.*

Demostración. Veamos primero que f no se anula *nunca* en Ω. En efecto, si h_m es una raíz m-ésima holomorfa de f, entonces para cada $z \in \Omega$ es $o_z(f) = mo_z(q_m)$. Como esto vale para cada $m \in M$, tiene que ser el caso que $o_z(f) = 0$ para todo $z \in \Omega$, pues si $o_z(f) = \infty$, deducimos que f se anula idénticamente por el teorema de la identidad.

Veamos ahora que f'/f es integrable en Ω: esto prueba que f admite un logaritmo holomorfo en esta región. Para cada $m \in M$ y cada lazo γ en Ω, vale que

$$\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = m\int_\gamma \frac{h'_m}{h_m}\,dz.$$

Ambas integrales están en $2\pi i\mathbb{Z}$ y, dado que m es arbitrario, tiene que ser el caso que la integral a la izquierda se anula. Esto prueba que f'/f es integrable, como queríamos. ◀

Corolario 2.7. *Si f no se anula y admite una raíz cuadrada holomorfa en Ω, admite un logaritmo holomorfo en Ω.*

Demostración. En efecto, en este caso podemos usar el teorema anterior con $M = \{2, 4, 8, 16, \dots\}$. ◀

2.2. Caracterización de las regiones HSC

Una región Ω en $\mathbb{C}$ es homológicamente simplemente conexa si todo lazo en Ω es nulhomólogo. El siguiente teorema caracteriza a tales regiones. Más adelante extenderemos en varias direcciones la lista de equivalencias siguiente, primero con el teorema de la aplicación conforme de Riemann, y luego con el teorema aproximación de Runge.

Teorema 2.8. *Sea Ω una región en $\mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones sobre Ω son equivalentes:*

(1) Ω es homológicamente simplemente conexa,

(2) Toda función holomorfa en Ω *es integrable,*

(3) La fórmula de Cauchy V.3 para toda $f \in HO$ *y todo lazo en* Ω*,*

(4) El interior de todo lazo en Ω *está contenido en* Ω*,*

(5) Toda unidad de $\mathscr{O}(\Omega)$ *admite un logaritmo holomorfo en* Ω*,*

(6) Toda unidad de $\mathscr{O}(\Omega)$ *admite una raiz holomorfa en* Ω*.*

Demostración. Ya sabemos que las afirmaciones (1)–(4) son todas equivalentes. Además, (2) $\Longrightarrow$ (5), y vimos que (5) y (6) son equivalentes. Para ver que (5) $\Longrightarrow$ (4), basta notar que si $c \notin \Omega$, entonces $z - c$ admite un logarmito holomorfo, y luego el índice de todo lazo en Ω respecto a c es nulo. ◀

Capítulo VI

Singularidades

1. Singularidades aisladas

1.1. Polos

Fijemos una región Ω en $\mathbb{C}$, un punto $c \in \Omega$ y $f \in \mathscr{O}(\Omega \smallsetminus c)$. El Teorema IV.3.1 afirma que si se cumple la condición

$$\lim_{z \to c} (z-c) f(z) = 0 \tag{VI.1}$$

entonces f se extiende a una función holomorfa en Ω. En tal caso, diremos que c es una ***singularidad evitable de*** f. En general, diremos que una función definida en Ω y holomorfa en $\Omega \smallsetminus c$ tiene una ***singularidad aislada en*** c. El objetivo de esta sección es caracterizar el comportamiento de las funciones holomorfas en torno a una singularidad aislada.

Dado que la condición (VI.1) se cumple si f está acotada en un entorno de c, resulta que f es no acotada en cualquier entorno de c si este punto es una singularidad aislada que no es evitable. Podría suceder, sin embargo, que para algún $m \in \mathbb{N}$, se cumpla que

$$\lim_{z \to c} (z-c)^m f(z) = 0 \tag{VI.2}$$

En tal caso, existe un primer $n \in N$ tal que se cumple esta condición, y el razonamiento que hicimos en el caso que (VI.1) prueba que $h(z) = (z-c)^n f(z)$ es holomorfa en todo Ω, y luego que podemos escribir

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-c)^n}$$

donde $h(c) \neq 0$, pues elegimos n mínimo. Decimos en este caso que f tiene un ***polo de orden*** n ***en*** c; los polos de orden 1 se llaman ***polos simples***.

Teorema 1.1. *Las siguiente propiedades son equivalentes.*

(1) f tiene un polo de orden n en c,

(2) Existe $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ *con* $h(c) \neq 0$ *tal que*

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-c)^n} \qquad\qquad \text{si } z \in \Omega \smallsetminus c$$

(3) Existe un entorno B *de* c *en* Ω *y* $h \in \mathcal{O}(B)$ *que se anula solo en* c*, y lo hace allí con orden* n*, tal que* $f = 1/h$ *en* $B \smallsetminus c$*,*

(4) Existen constantes positivas m_* *y* m^* *y un entorno* B *de* c *en* Ω *tal que*

$$m_*|z-c|^{-n} \leqslant |f(z)| \leqslant m^*|z-c|^{-n}$$

para $z \in B \smallsetminus c$*.*

Demostración. La discusión previa al teorema prueba que (1) $\implies$ (2), y evidentemente (2) $\implies$ (3) $\implies$ (4). Para ver que (4) $\implies$ (1), notemos que la desigualdad implica, primero, que $f(z)(z-c)^n$ está acotada en un entorno de c y, segundo, que $f(z)(z-c)^{n-1}$ no. Así f tiene un polo de orden n en c, como queríamos ver. ◂

Notemos que del teorema anterior se desprende que el conjunto de funciones holomorfas $g : \Omega \smallsetminus c \longrightarrow \mathbb{C}$ con un polo en c coincide con el conjunto de funciones holomorfas $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ finitas en $\Omega \smallsetminus c$ y tales que $g(c) = \infty$.

Proposición 1.2. *La función* f *tiene un polo de orden* n *en* c *si y solamente si existe un polinomio* p *de grado* n *y una función holomorfa* f_0 *en* Ω *tal que* $f_0(c) = 0$ *y*

$$f(z) = p\left(\frac{1}{z-c}\right) + f_0(z) \tag{VI.3}$$

En este caso, f_0 *y* p *están univocamente determinados por* f*.*

Demostración. Si f tiene un polo de orden n en c, sabemos que se escribe de la forma $f(z) = (z-c)^{-n}h(z)$ donde $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $h(c) \neq 0$. Podemos escribir, usando un desarrollo de Taylor finito,

$$h(z) = q(z-c) + (z-c)^{n+1}g_0(z)$$

donde $g_0(z)$ es holomorfa en Ω y q es un polinomio de grado n con $q(c) \neq 0$, y luego obtener la expresión (VI.3) buscada, tomando $p(z) = z^n q(z^{-1})$ y $f_0 = (z - c)g_0$. Recíprocamente, si se expresa en la forma (VI.3) es claro que tiene un polo de orden n en c. Finalemente, la unicidad está clara por ser única la función h con la que empezamos. Esto completa la demostración. ◀

Otra forma de escribir el resultado de la proposición anterior es la siguiente.

Corolario 1.3. *La función f tiene un polo de orden m en c exactamente cuando admite un desarrollo en serie de la forma*

$$f(z) = \sum_{n \geqslant m} a_n (z-c)^n,$$

convergente en un entorno de c en Ω.

Esto es un ejemplo de una serie de Laurent con parte principal finita; estudiaremos las series de Laurent en la Sección 2.

1.2. Singularidades esenciales

Diremos que f tiene una ***singularidad esencial en*** c si c no es ni una singularidad evitable ni un polo de f. El siguiente teorema caracteriza el comportamiento errático de f en torno en c en este caso.

Teorema 1.4. (Casorati–Weierstrass) *Son equivalentes:*

(1) f tiene una singularidad esencial en c,

(2) Para todo entorno perforado B' de c en Ω, $f(B')$ es denso en $\mathbb{C}$,

(3) Existe una sucesión (z_n) en $\Omega \smallsetminus c$ que converge a c tal que $(f(z_n))$ no converge en $\mathbb{C}^*$.

Demostración. Para ver que (1) $\implies$ (2), supongamos que existen discos $B(c,r)$ y $B(w,s)$ tal que $f(B(c,r) \smallsetminus c) \cap B(w,s) = \varnothing$. Esto dice que la función $g(z) = (f(z) - w)^{-1}$ es holomorfa y acotada en $B'(c,r)$, así por el teorema de continuación de Riemann, es holomorfa en $B(c,r)$. Resulta que f es holomorfa o tiene un polo en c acorde a si g no se anula en c o tiene allí un cero de orden positivo. Es inmediato que (2) $\implies$ (3), y también que (3) $\implies$ (1): si f es holomorfa en c o si tiene un polo en c, $f(z_n)$ converge siempre, posiblemente a ∞, si $z_n \to c$. ◀

1.3. Singularidades en ∞

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y supongamos que Ω contiene un entorno perforado de ∞. Existe entonces $r > 0$ y un disco $B_r(0)$ tal que $g = f(z^{-1}) : B_r(0) \smallsetminus 0 \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa. Diremos que ∞ es una singularidad evitable, un polo o una singularidad esencial de f acorde al tipo de singularidad que g tiene en el origen. En particular, f tiene una singularidad evitable en ∞ exactamente cuando existe y es finito $f(\infty)$. Diremos que una función entera es ***trascendente*** si no es un polinomio.

Proposición 1.5. *Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ entera. Entonces f es*

(1) trascendente si y sólo si ∞ es una singularidad esencial de f,

(2) un polinomio de grado n si y sólo si ∞ es un polo de orden n de f y

(3) constante si y sólo si ∞ es una singularidad evitable de f.

En particular, si f es trascendente, para cada $c \in \mathbb{C}$ existe una sucesión $(z_n) \in \mathbb{C}$ que tiende a ∞ tal que $f(z_n) \to c$.

Demostración. Basta que veamos la validez de (2) y (3). Si f es un polinomio de grado n, entonces ciertamente ∞ es un polo de orden n de f. Si, por otro lado, $f(z^{-1})$ tiene un polo de orden n en ∞, podemos escribir

$$f(z^{-1}) = p(z^{-1}) + g(z)$$

con p un polinomio de orden n y g holomorfa en un entorno del origen con $g(0) = 0$. La función $h(z) = f(z) - p(z)$ es entonces entera, y $h(\infty) = g(0) = 0$, así por el teorema de Liouville h es idénticamente nula, y f es un polinomio. Por otro lado, (3) es una solamente reformulación del teorema de Liouville, y la última afirmación del teorema es una consecuencia del Teorema de Casorati–Weierstrass. ◀

2. Series de Laurent

La representación en serie de una función holomorfa es útil para entender, por un lado, el comportamiento local de esa función (Teorema IV.2.5) y de sus derivadas (Proposición IV.1.1), como también —de forma indirecta— la disposición de sus posibles singularidades (Proposición IV.3.2). Veremos ahora como representar a las funciones holomorfas en regiones que no son simplemente conexas, los anillos. Esta nueva representación local será extremadamente útil, por ejemplo, para entender el comportamiento de las funciones holomorfas en torno a singularidades aisladas.

En lo que sigue, dados $c \in \mathbb{C}$ y $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$, escribimos $A_{r,R}(c)$ al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - c| < R\}$ y lo llamamos el ***anillo de radio menor*** r ***y radio mayor*** R ***centrado en*** c o, más brevemente, un anillo. Notaremos de ahora en adelante un tal anillo simplemente por A, y quedará fijo durante la sección, y notaremos por A^+ y A^- a los conjuntos $A_{r,\infty}(c)$ y $B_R(c)$, respectivamente, que cumplen que $A = A^+ \cap A^-$. Usaremos la notación $B'_t(c)$ para el anillo $A_{0,t}(c)$.

2.1. La fórmula de Cauchy en anillos

Lema 2.1. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces para todo par de números $u, v \in (r, R)$ tal que $u < v$*

$$\int_{\partial B_u(c)} f\, dz = \int_{\partial B_v(c)} f\, dz.$$

Demostración. Los lazos que aparecen en las integrales son homotópicos como lazos mediante la homotopía $H : [0,1] \times [u, v] \longrightarrow A$ tal que $H(s,t) = c + te^{2\pi i s}$, así las integrales coinciden. Otra forma de ver esto es la siguiente: sin perder generalidad, podemos asumir que $c = 0$, y podemos parametrizar el anillo A usando la función exponencial y el rectángulo $R = [\log u, \log v] \times [0, 2\pi]$, y escribir

$$\int_{\partial A} f(\xi) d\xi = \int_{\partial R} f(\exp w) \exp w\, dw$$

por un simple cambio de variables. Como R es un rectángulo, que es convexo, y como $f(\exp w) \exp w$ es holomorfa, la integral a la derecha es nula. ◀

Teorema 2.2. (Fórmula de Cauchy en anillos.) *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y supongamos que el anillo A tiene clausura contenida en Ω. Si $z \in A$, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Demostración. Fijemos $z \in A$, y consideremos el cociente holomorfo de f para $\xi \in A$ que extendemos de la forma usual en $\xi = z$:

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}.$$

Por el lema anterior, la integral de g sobre A^+ y la integral de g sobre A^- coinciden, y luego

$$\int_{\partial A^+} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial A^-} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi.$$

Pero $\int_{\partial A^+} \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i$ mientras que $\int_{\partial A^+} \frac{d\xi}{\xi - z} = 0$, así reordenando obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A^-} \frac{f(\xi))}{\xi - z} d\xi = f(z),$$

que es lo que queríamos. ◀

Es importante que notemos que las integrales

$$\int_{\partial A^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \qquad\qquad \int_{\partial A^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

definen funciones holomorfas en cuatro regiones distintas de $\mathbb{C}$, el interior y exterior de ∂A^+ y el interior y exterior de ∂A^-, respectivamente. Vamos a interesarnos, sin embargo, sólo por dos de ellas: si definimos $f^- : A_r(c) \longrightarrow \mathbb{C}$ y $f^+ : B_R(c) \longrightarrow \mathbb{C}$ usando las fórmulas integrales

$$f^{\pm}(z) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A^{\pm}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

entonces en la intersección $A = A^+ \cap A^-$ tenemos la igualdad $f = f^+ + f^-$, que llamamos la ***descomposición de Laurent de*** f ***en*** A. En general, no será cierto que esta igualdad se extiende a otras regiones de Ω. El teorema que sigue dice que esta representación es única, y que, como sucede en la fórmula de Cauchy, podemos elegir a los círculos A^+ y A^- con un poco más de libertad.

Teorema 2.3. (Descomposición de Laurent) *Sea* $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorfa. Existen funciones* $f^+ \in \mathscr{O}(A^+)$ *y* $f^- \in \mathscr{O}(A^-)$ *tales que* $f = f^+ + f^-$ *en* A *y* $f^-(\infty) = 0$. *Además, estas condiciones determinan a* f^+ *y* f^- *unívocamente, de forma que para cualquier* $r < t < R$*,*

$$\begin{aligned} f^+(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_t(c)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi && \text{si } z \in B_t(c), \\ f^-(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_t(c)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi && \text{si } z \in \mathbb{C} \smallsetminus \overline{B_t(c)}. \end{aligned}$$

Demostración. Para cada t con $r < t < R$, la función

$$f_t^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_t(c)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

es holomorfa en $B_t(c)$, y si $t' \in (t, R)$, las funciones $f_{t'}^+$ y f_t^+ coinciden en $B_t(c)$, pues el integrando que las define es holomorfo en el disco $A_{t,t'}(z)$, y podemos usar el Lema 2.1. Podemos definir así una función $f^+ \in \mathscr{O}(A^+)$ que concide con f_t^+ en $B_t(c)$. Análogamente, podemos definir una función $f^- \in \mathscr{O}(A^-)$ mediante una fŕomula integral como en el enunciado del teorema. El Teorema 2.2 asegura que vale la igualdad $f = f^+ - f^-$ en A: si $z \in A$, basta que tomemos un anillo A' con clausura contenida en A y centro c que contiene a z, y aplicar tal teorema a f en A'. Por otro lado, la estimación estándar asegura que $f^-(\infty) = 0$.

Para ver la unicidad de f^+ y f^-, supogamos que $g^+ \in \mathscr{O}(A^+)$ y $g^- \in \mathscr{O}(A^-)$ son tales que $f = g^+ g^-$ en A. Entonces $g^+ - f^+ = f^- - g^-$ en A, y podemos definir una función entera $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de forma que

$$h = \begin{cases} g^+ - f^+ & \text{en } A^+, \\ f^- - g^- & \text{en } A^-, \end{cases}$$

Como $h(\infty) = 0$, h es constantemente 0 por el teorema de Liouville, que prueba que $g^+ = f^+$ y que $g^- = f^-$, como queríamos. ◀

2.2. Series de Laurent

De la misma manera que la fórmula de Cauchy en discos nos permite encontrar desarrollos en serie de potencias para funciones holomorfas en tales conjuntos, la fórmula integral de Cauchy en anillos nos permitirá encontrar desarrollos en ***series de Laurent*** para funciones holomorfas en este tipo de dominios: una serie de Laurent en torno a $c \in \mathbb{C}$ es una serie formal

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-c)^n$$

en potencias tanto positivas como negativas de $z - c$, compuesta de una ***parte regular*** y una ***parte principal***

$$f^+(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z-c)^n, \qquad f^-(z) = \sum_{n<0} a_n (z-c)^n,$$

respectivamente. Notemos que la parte regular de una serie de Laurent es una serie de potencias usual, mientras que la parte principal se obtiene al evaluar una serie de potencias usual en $(z-c)^{-1}$. En particular, toda serie de potencias es una serie de Laurent con parte principal nula.

Las series formales de Laurent forman un $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}[\![z, z^{-1}]\!]$ que contiene el álgebra de series formales $\mathbb{C}[\![z]\!]$, el álgebra de polinomios $\mathbb{C}[z]$, y el álgebra de ***polinomios de Laurent*** $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$, que no son otra cosa que series formales de Laurent con finitos términos. Si una serie de Laurent es de la forma

$$\sum_{m \geqslant n} a_n (z-c)^n$$

para algún $m \in \mathbb{Z}$ con $a_m \neq 0$, diremos que tiene orden m. Es importante notar que las series formales de Laurent no admiten una estructura de $\mathbb{C}$-álgebra para la cual las álgebras anteriores son subálgebras.

Teorema 2.4. *Si $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, f admite un desarrollo único en una serie de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-c)^n \qquad \text{donde} \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_t(c)} \frac{f(\xi)}{(\xi-c)^{n+1}}\,d\xi$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ y cualquier $t \in (r,R)$, y tal serie converge normalmente a f en A.

Demostración. Sea $f = f^+ + f^-$ la descomposición de Laurent de f en A. La parte regular f^+ admite un desarrollo en serie

$$f^+(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n (z-c)^n$$

que converge normalmente a f^+ en el disco A^+ por el Teorema III.2.8. Por otro lado, si definimos $g : B'_{1/r}(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(z) = f^-(c + z^{-1}),$$

resulta g holomorfa, y además $\lim_{z\to 0} g(z) = f^-(\infty) = 0$, así g se extiende, de hecho, a una función holomorfa en $B_{1/r}(0)$ con $g(0) = 0$. Resulta que g tiene un desarrollo en serie de potencias en $B_{1/r}(0)$ de la forma

$$g(z) = \sum_{n>0} b_n z^n$$

que converge normalmente a g allí. Si escribimos $a_{-n} = b_n$ para $n > 0$ resulta que obtuvimos el desarrollo en serie de Laurent de f deseado:

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-c)^n,$$

y la convergencia es normal en A. Para ver la unicidad, es suficiente que probemos la fórmula para los coeficientes que dimos en el enunciado del teorema. Dado

$m \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$(z-c)^{-m-1} f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-c)^{n-m-1},$$

y para $t \in (r, R)$, la convergencia normal permite que integremos la serie derecha sobre $\partial B_t(c)$ término a término, y en ese caso el único término que aparece es aquel con $n - m - 1 = -1$, y lo hace con valor $2\pi i a_n$, que da

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_t(c)} \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{m+1}} d\xi = a_m$$

para cada $m \in \mathbb{Z}$, como queríamos probar. ◀

Las series de Laurent nos proveen de otra forma de clasificar las singularidades aisladas de una función, mucho más útil en la práctica.

Teorema 2.5. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una región y $c \in \Omega$, y sea $f : \Omega \setminus c \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Supongamos que la serie de Laurent de f en un anillo $B'(c, r) \subseteq \Omega$ tiene parte principal*

$$p(z) = \sum_{n<0} a_n (z-c)^n.$$

Entonces c es

(1) una singularidad evitable de f si y sólo si p es nula,

(2) un polo de orden m si y sólo si p es un polinomio de Laurent de orden m y,

(3) una singularidad esencial si y sólo si p es una serie con infinitos términos no nulos.

Demostración. Si f tiene una singularidad evitable en c, su serie de Taylor en $B(c, r)$ coincide con su serie de Laurent en $B'(c, r)$, y luego la unicidad de la última prueba que p tiene que ser nula. Recíprocamente, si p es nula podemos extender f a una función holomorfa en $B(c, r)$ de forma que $f(c) = a_0$, que prueba (1). Para ver (2), notemos que si p es un polinomio de Laurent de orden m, entonces la Proposición 1.2 asegura que f tiene un polo de orden m en c. Recíprocamente, el corolario a esta misma proposición prueba que si f tiene un polo de orden m en c, f admite una representación en serie de Laurent con parte principal finita, y de orden m. La unicidad de la serie de Laurent de f prueba entonces que p es una serie finita de orden m. Finalmente, (3) se deduce de lo que acabamos de probar, pues una singularidad esencial existe exactamente cuando ni (1) ni (2) valen. ◀

2.3. Ejemplos

Es importante que notemos que, a diferencia de lo que sucede con las series de potencias, el desarrollo en serie de Laurent de una función en torno a un punto $c \in \mathbb{C}$ depende del anillo en torno a c que estemos considerando. Por ejemplo, el desarrollo en serie de Laurent de la función holomorfa $f : \mathbb{C} \smallsetminus \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z(1-z))^{-1}$ en $A_{0,1}(0)$ está dado por

$$\frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 \cdots$$

mientras que su desarrollo en $A_{1,\infty}(0)$ es la serie de Laurent sin parte regular

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \cdots .$$

Por esta razón, si f es una función con una singularidad aislada en c, la serie de Laurent de f en torno a c *siempre* significará aquella obtenida en un disco perforado en torno a c.

En general, el desarrollo en serie de Laurent de una función racional se obtiene directamente de un desarrollo en fracciones simples. Por ejemplo, consideremos el punto $2i \in \mathbb{C}$, y el anillo $A_{1,3}(2i)$ que contiene a las singularidades i y $-i$ de f en su frontera. Si escribimos

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$

esto da la separación de Laurent de f en tal disco, con parte regular y parte principal

$$f^+(z) = -\frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}, \qquad\qquad f^-(z) = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i},$$

respectivamente. Como hicimos en la demostración del Teorema 2.4, expandimos a la parte regular en potencias positivas de $z-2i$, para obtener

$$f^+(z) = \frac{1}{2i}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{-1}{3i}\right)^{n+1}(z-2i)^n,$$

y expandimosa la parte principal en potencias negativas de $z-2i$, obteniendo

$$f^-(z) = \frac{1}{2i}\sum_{n<0}\left(\frac{1}{i}\right)^{n+1}(z-2i)^n.$$

3. Funciones meromorfas

Como es costumbre, fijemos una región $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Diremos que una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es ***meromorfa en*** Ω si existe un subconjunto discreto P_f de Ω tal que f es holomorfa en $\Omega \smallsetminus P_f$ y tal que cada punto de P_f es un polo de f. Naturalmente, llamamos a P_f el ***conjunto de polos de*** f: es allí donde f toma el valor ∞. En particular, $P_f = \varnothing$ exactamente cuando f es holomorfa en Ω. Notemos que como P_f es relativamente cerrado en Ω, resulta vacío, finito, o infinito y numerable. Escribimos $\mathscr{M}(\Omega)$ al conjunto de funciones meromorfas sobre Ω.

Proposición 3.1. *Las funciones meromorfas* $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *son exactamente las funciones holomorfas* $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$.

Esta proposición permite que identifiquemos $\mathscr{M}(\Omega)$ con $\mathscr{O}(\Omega,\mathbb{C}^*)$ y $\mathscr{O}(\Omega)$ con el conjunto de funciones en $\mathscr{O}(\Omega,\mathbb{C}^*)$ finitas en todo punto.

Demostración. Recordemos que una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es holomorfa si para cada punto $c \in \Omega$ existe un disco B tal que o bien $f(B) \subseteq \mathbb{C}$ y $h = f|_B$ es holomorfa, o bien $f(B) \subseteq \mathbb{C}^* \smallsetminus 0$ y la función $1/h$ es holomorfa.

Sea $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}^*$ meromorfa. Por (2) del Teorema 1.1, sabemos que f tiene un polo de orden m en c si y solamente si existe un entorno B de c y una función holomorfa nunca nula $g:B\longrightarrow\mathbb{C}$ tal que $f(z)=(z-c)^{-m}g(z)$ en B. Ciertamente entonces $f(B)\subseteq\mathbb{C}^*\smallsetminus 0$ y $1/f$ es holomorfa en B. Luego $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}^*$ es holomorfa.

Supongamos, por otro lado, que $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}^*$ holomorfa. Entonces el conjunto $f^{-1}(\infty)$ es discreto en Ω: para cada punto $c\in\Omega$ donde $f(c)=\infty$, existe un disco B tal que f no se anula en B y tal que la función $1/f$ es holomorfa en B. Como c es un cero de $1/f$ de orden m, en primer lugar c es un punto aislado de $f^{-1}(\infty)$ y, si escribimos $f(z)=(z-c)^m g(z)$ con $g(c)\neq 0$, queda en evidencia que c es un polo de orden m de f. Así f es, según nuestra definición, meromorfa. ◀

Notemos que, como f es holomorfa en la región $\Omega\smallsetminus P_f$, su conjunto de ceros Z_f es también discreto y numerable, y la función $g=1/f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}^*$ es otra vez holomorfa, y cumple que $Z_g=P_f$ y que $P_g=Z_f$. Así la inversa multiplicativa de toda función meromorfa sobre una región es otra vez una función meromorfa. Por otro lado, ciertamente si $h\in\mathscr{M}(\Omega)$ entonces $f+h, fh\in\mathscr{M}(\Omega)$ y, más aún, $P_{f+h},P_{fh}\subseteq P_f\cup P_h$. Resulta que la $\mathbb{C}$-álgebra $\mathscr{M}(\Omega)$ es un cuerpo, que contiene a $\mathscr{O}(\Omega)$ como subálgebra.

Diremos que $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ es meromorfa en un punto $c\in\Omega$ si es meromorfa en un entorno B de c contenido en Ω. Por la Proposición 1.2, existe $m\in\mathbb{Z}$ y un desarrollo en serie

$$f(z)=\sum_{n\geqslant m}a_n(z-c)^n,$$

con $a_m\neq 0$. Llamamos a m el orden de f en c, y lo notamos $o_c(f)$; esta notación es consistente con la que usamos para el orden de f en una de sus raíces, esto es, extiende la función de orden $\mathscr{O}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{N}$ a una función $\mathscr{M}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{Z}$. Además las funciones holomorfas $\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ son exactamente las que tienen orden positivo en cada punto de Ω. El lector puede verificar que si f y g están en $\mathscr{M}(\Omega)$, entonces para cada $c\in\Omega$,

$$o_c(fg)=o_c(f)+o_c(g),\qquad\qquad o_c(f+g)\geqslant \text{mín}(o_c(f),o_c(g))$$

con igualdad en el segundo caso siempre que $o_c(f) \neq o_c(g)$. Si acordamos que el orden de la función nula en cada punto de Ω es ∞, para cada $c \in \Omega$, la función $o_c : \mathscr{M}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ es una ***valuación discreta***, y hace de $\mathscr{M}(\Omega)$ un ***cuerpo de valuación discreta***. Tenemos también un teorema de identidad para funciones meromorfas:

Teorema 3.2. *Sean $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ meromorfas. Son equivalentes*

(1) $f = g$,

(2) El conjunto $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ tiene un punto de acumulación en Ω,

(3) Existe $c \in \Omega$ que no es un polo de f ni de g tal que $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Basta que usemos el teorema de la identidad para la región $\Omega' = \Omega \setminus (P_f \cup P_g)$ y las funciones holomorfas $f, g : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}$. ◀

Ejercicio 3.1. ¿Por qué es Ω' también una región?

3.1. Funciones racionales

Ya vimos que, dado un abierto Ω en $\mathbb{C}$, las funciones meromorfas allí son exactamente las funciones holomorfas $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Veamos ahora que

Proposición 3.3. *Las funciones holomorfas $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ son precisamente las funciones racionales $\mathbb{C}(z)$.*

Demostración. Tomemos $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorfa. Así, en particular, la restricción $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es holomorfa, y luego tiene asociado su conjunto P_f de polos y su conjunto Z_f de ceros. Como f es holomorfa en ∞, tanto P_f como Z_f debe ser finitos. Además, si f tiene un polo de orden n en ∞, $z^n f(z)$ es holomorfa y finita en un entorno de ∞. Esto dice que existe una función racional r tal que $g = r^{-1} f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función entera nunca nula tal que $g(\infty) \in \mathbb{C}$, y luego por el teorema de Liouville g es constante, que prueba que f es racional. ◀

4. Residuos

4.1. Teorema de los Residuos

Fijemos una función meromorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Para cada singularidad $c \in \Omega$ de f, definimos el ***residuo de*** f ***en*** c por

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} f\,dz$$

donde B es un disco con centro c y clausura contenida en Ω que contiene a c como único punto singular de f, y lo notamos $\operatorname{Res}(f, c)$. Si el desarrollo de Laurent de f en B' es

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-c)^n$$

entonces $\operatorname{Res}(f, c) = a_{-1}$.

Proposición 4.1. *El residuo de f en c es el único número complejo λ tal que $f(z) - \lambda(z-c)^{-1}$ es integrable en un entorno perforado de c.*

Demostración. Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $g(z) = f(z) - \lambda(z-c)^{-1}$ es integrable en un entorno perforado de c. Entonces, integrando a g sobre el borde de un disco B suficientemente pequeño en torno a c, obtenemos

$$\int_{\partial B} f\,dz = 2\pi i\lambda$$

y $\lambda = \operatorname{Res}(f, c)$. Recíprocamente, si $\lambda = \operatorname{Res}(f, c)$ la función g tiene un desarrollo de Laurent en torno a c sin término $(z-c)^{-1}$, y podemos entonces integrarla término a término y obtener una primitiva de g. ◀

El siguiente teorema pone en evidencia el rol central de los residuos de funciones meromorfas en el cálculo de integrales.

Teorema 4.2. (Teorema de los Residuos) *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ meromorfa, y sea γ un lazo nulhomólogo en Ω que no pasa por ningún polo de f. Entonces el conjunto*

$A = P_f \cap \mathrm{Int}(\gamma)$ *es finito y*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = \sum_{w\in A} \mathrm{Ind}(\gamma, w)\,\mathrm{Res}\big(f, w\big).$$

En la práctica, la región Ω será un conjunto convexo o estelar, y entonces cualquier lazo allí resultará nulhomólogo, y A será en general evidentemente finito —el enunciado que dimos tiene, sin embargo, cierto interés teórico: las nociones de interior y nulhomología son necesarias si queremos enunciar y demostrar nuestro teorema con este nivel de generalidad, y es esencialmente imposible de hacerlo sin recurrir a argumentos informales. Veremos más adelante que nuestra elección de exposición no es una simple arbitrariedad.

Demostración. Como la traza de γ es compacta, podemos obtener un compacto $K \subseteq \Omega$ que es union de finitos discos cerrados que contiene a γ. De hecho, como el interior de γ está contenido en Ω por el Teorema V.1.8 y como $\overline{\mathrm{Int}(\gamma)} \subseteq \mathrm{Int}(\gamma) \cup \gamma$, podemos que K cubre también a $\mathrm{Int}(\gamma)$. En tal compacto f tiene finitos polos y luego A es finito; digamos que $A = \{w_1, \dots, w_t\}$.

Para cada $i \in \{1, \dots, t\}$ sea $p_i(z) = \mathrm{Res}\big(f, w_i\big)(z - w_i)^{-1} + \tilde{p}_i(z)$ la parte principal del desarrollo de Laurent de f en torno a w_i, donde $\tilde{p}_i$ contiene los términos con potencias negativas de orden por lo menos dos de p_i. Cada p_i es holomorfa en $\mathbb{C} \smallsetminus \{w_i\}$ y cada $\tilde{p}_i$ admite una primitiva en tal conjunto. Además, la función $\tilde{f} = f - p_1 - \cdots - p_t$ es holomorfa en un abierto Ω' que contiene a K, y γ es nulhomóloga en Ω' pues $\mathrm{Int}(\gamma) \subseteq K \subseteq \Omega'$. Así la integral de $\tilde{f}$ sobre γ es nula, y como cada $\tilde{p}_i$ admite una primitiva, resulta que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{t} \mathrm{Res}\big(f, w_i\big)\int_\gamma \frac{dz}{z - w_i} = \sum_{w\in A} \mathrm{Ind}(\gamma, w)\,\mathrm{Res}\big(f, w\big),$$

que es lo que queríamos probar. ◀

En particular, si el lazo γ es ***simple***, esto es, si $\mathrm{Ind}(\gamma, w) = 1$ para todo $w \in \mathrm{Int}(\gamma)$, obtenemos el siguiente resultado, que es el que usaremos más adelante cuando integremos sobre lazos simples como pueden serlo círculos, sectores circulares, rectángulos, polígonos y otras curvas similares.

Corolario 4.3. *Con las hipótesis y la notación del Teorema 4.2, si γ es un lazo simple, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f\,dz = \sum_{w\in A} \operatorname{Res}(f,w).$$

4.2. Cálculo de Residuos

Consideremos una función meromorfa $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ y veamos como podemos efectuar el cálculo de $\operatorname{Res}(f,c)$ en algunos casos usuales. Si f tiene un polo simple en c, entonces

$$\operatorname{Res}(f,c) = \lim_{z\to c}(z-c)f(z)$$

pues f tiene parte principal $a_{-1}(z-c)^{-1}$. Más generalmente, si f tiene un polo de orden m en c entonces el mismo razonamiento muestra que

$$\operatorname{Res}(f,c) = \lim_{z\to c}\left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1}\left[\frac{(z-c)^m f(z)}{(m-1)!}\right].$$

Si, por otro lado, f es un cociente g/h con g y h holomorfas en un entorno de c tal que $g(c)\neq 0$ y $h(c)=0$, y si f tiene un polo simple en c —es decir, si $h'(c)\neq 0$, obtenemos usando lo anterior que

$$\operatorname{Res}(f,c) = \frac{g(c)}{h'(c)}.$$

En general, si h es un polinomio con una raíz de orden m en c, podemos usar la fórmula que obtuivmos para el caso que f tiene un polo en c de orden m, pero si h es trascendente en c, esto puede resultar complicado. En este caso, podemos valernos la expansión en serie de h y g, como sigue.

Supongamos que h no se anula en c y que g lo hace con orden m, así

$$h(z) = \sum_{n\geqslant 0} h_n(z-c)^n \qquad\qquad g(z) = \sum_{n\geqslant 0} g_n(z-c)^{n+m}$$

y f tiene un polo de orden m en c. Queremos encontrar una serie de potencias

$\sum_{n\geqslant 0} f_n(z-c)^n$ tal que

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} h_n(z-c)^n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} f_n(z-c)^n\right) = \sum_{n\geqslant 0} g_n(z-c)^n.$$

y extraer el coeficiente $f_{m-1} = \operatorname{Res}(f,c)$. La igualdad anterior da una lista infinita triangular de ecuaciones,

$$\begin{aligned}
g_0 &= h_0 f_0\\
g_1 &= h_1 f_0 + h_0 f_1\\
g_2 &= h_2 f_0 + h_1 f_1 + h_0 f_2\\
g_3 &= h_3 f_0 + h_2 f_1 + h_1 f_2 + h_0 f_3\\
\vdots &= \qquad\qquad \ddots
\end{aligned}$$

Como $h_0 \neq 0$, podemos invertir este sistema inductivamente. De hecho, como la matriz infinita es triangular superior, el determinante de la menor principal m-ésima es h_0^m y usando la regla de Cramer resulta que

$$f_{m-1} = h_0^{-m}\begin{vmatrix} h_0 & 0 & 0 & \cdots & g_0\\ h_1 & h_0 & 0 & \cdots & g_1\\ h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & g_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{m-1} & h_{m-2} & h_{m-3} & \cdots & g_{m-1}\end{vmatrix}$$

es el residuo buscado. Finalmente, en el caso que f tenga una singularidad esencial, será en general necesario obtener la serie de Laurent de f en torno a c. El lema siguiente será útil más adelante.

Lema 4.4. *Supongamos que f es meromorfa en c y que g es holomorfa en c. Entonces*

(1) Si f tiene un polo simple $\operatorname{Res}(fg,c) = \operatorname{Res}(f,c)g(c)$.

(2) *Si f tiene orden $m \in \mathbb{Z}$ en c, entonces f'/f tiene un polo simple en c y*

$$\operatorname{Res}\big(gf'/f, c\big) = mg(c).$$

(3) *Si f toma el valor $f(c)$ con multiplicidad m en c y si f y g son holomorfas en c, entonces*

$$\operatorname{Res}\left(g\frac{f'}{f-f(c)}, c\right) = mg(c).$$

Demostración. En el primer caso, fg tiene también un polo simple en c, y luego

$$\operatorname{Res}\big(fg, c\big) = \lim_{z\to c}(z-c)f(z)g(z) = \operatorname{Res}\big(f,c\big)g(c).$$

Para ver la segunda afirmación, escribamos $f(z) = (z-c)^m h(z)$ con $h(z)$ holomorfa en un entorno de c y $h(c) \neq 0$. Entonces

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-c} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Como el segundo sumando es holomorfo en un entorno de c, esto prueba que f'/f tiene un polo simple en c, y luego que $\operatorname{Res}\big(f'/f, c\big) = m$. Usando lo anterior concluímos que $\operatorname{Res}\big(gf'/f, c\big) = mg(c)$. Para ver la última afirmación, notemos que $f - f(c)$ tiene orden m en c, y apliquemos lo que acabamos de probar a esta función. ◀

4.3. Ejemplos

Ilustramos la discusión anterior con algunos ejemplos. Comencemos con el caso de polos simples, y para eso consideremos la función meromorfa

$$f(z) = \pi\cot\pi z = \pi\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z},$$

que tiene polos simples en cada entero $k \in \mathbb{Z}$. En este caso, sabemos que

$$\operatorname{Res}\big(f, z_k\big) = \pi\lim_{z\to k}(z-k)\cot z = \pi\frac{\cos(\pi k)}{\sin(\pi k)'} = 1$$

pues $(\sin \pi z)' = \pi \cos \pi z$. Resulta que si g es una función meromorfa que es holomorfa en $k \in \mathbb{Z}$, por el Lema 4.4 obtenemos que $\operatorname{Res}(fg, k) = g(k)$. Esto permite que usemos a f junto con el teorema del Residuo para obtener una representación integral

$$\sum_{|k| \leqslant n} g(k) = \frac{1}{2i} \int_\Gamma g(z) \cot \pi z \, dz$$

donde Γ es una curva simple cerrada en $\mathbb{C}$ que contiene a los enteros $-k, -k+1, \dots, k-1, k$ en su interior y a los demás en su exterior. De forma análoga, la función

$$h(z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z = \frac{\pi}{\cos \pi z}$$

tiene residuo $(-1)^k$ en cada entero, y permitirá más adelante que evaluemos sumas alternadas

$$\sum_{|k| \leqslant n} (-1)^k g(k).$$

Consideremos ahora el caso de un polo de orden mayor. La función

$$f(z) = \frac{\cos \pi z}{(e^{2\pi i z} - 1)^2}$$

tiene polos de orden 2 en los enteros, y podemos escribir

$$(e^{2\pi i z} - 1)^2 = -4\pi^2 z^2 - 8\pi^3 i z^3 + O(z^4) = -(2\pi)^2 z^2 (1 + h(z))$$

donde $h(0) = 0$, $h'(0) = 2\pi i$. Usando esto, resulta que $\operatorname{Res}(f, 0) = -(2\pi i)^{-1}$. El lector puede hacer lo mismo para cada $k \in \mathbb{Z}$, y obtener que $\operatorname{Res}(f, k) = (-1)^{k+1}(2\pi i)^{-1}$.

Como ejemplo final, tomemos $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la función

$$f_n(z) = (1 + z^n)^{-1}$$

que tiene un polo simple en cada raíz n-ésima de -1, y luego si ξ es una de ellas, como $\xi^{n-1} = -\xi^{-1}$, obtenemos

$$\operatorname{Res}\bigl(f_n, \xi\bigr) = \lim_{z\to\xi} \frac{z-\xi}{1+z^n} = \frac{1}{n\xi^{n-1}} = -\frac{\xi}{n}.$$

Resulta que si g es holomorfa en ξ y no se anula allí, tenemos que $\operatorname{Res}\bigl(f_n g, \xi\bigr) = -\xi g(\xi)/n$.

5. Enumeración de polos y ceros

Usando el Lema 4.4 y el Teorema de los Residuos, deducimos el siguiente resultado.

Teorema 5.1. *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ meromorfa no constante, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, y tomemos $w_0 \in \mathbb{C}$. Si γ es un lazo nulhomólogo en Ω que no corta a $P_f \cup f^{-1}(w_0)$, entonces*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\,dz = \sum_{f(w)=w_0} &\operatorname{Ind}(\gamma, w)\mu(f, w)g(w)\\ &+ \sum_{w\in P_f} \operatorname{Ind}(\gamma, w)o_w(f)g(w),\end{aligned}$$

donde la suma derecha involucra solo finitos términos.

En particular, tomando g como la identidad o la función constante 1, obtenemos los dos resultados siguientes:

Proposición 5.2. (Enumeración de polos y ceros) *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ meromorfa no constante, y tomemos $w_0 \in \mathbb{C}$. Si γ es un lazo simple nulhomólogo en Ω que no corta a $P_f \cup f^{-1}(w_0)$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w_0}\,dz = Z_f(\gamma, w_0) - P_f(\gamma)$$

donde $Z_f(\gamma, w_0)$ es el número de soluciones a $f(z) = w_0$ en el interior de γ, contadas con multiplicidad, y $P_f(\gamma)$ es el número de polos de f en el interior de γ, también *contados con multiplicidad.*

Demostración. Basta que notemos que como tomamos $g = 1$ y como γ es simple, por el Teorema 5.1 la integral en el enunciado de la proposición es igual a

$$\sum_{f(w)=w_0} \mu(f,w) + \sum_{w\in P_f} o_w(f)$$

donde para cada solución w a $f(w) = w_0$, el entero $\mu(f,w)$ es la multiplicidad con la que f toma el valor w_0 en w, y donde para $w \in P_f$, $o_w(f)$ es el orden de f en el polo w, que es el entero opuesto al orden del polo w de f. ◀

Proposición 5.3. (Inversión) *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorfa no constante, y tomemos $w_0 \in \mathbb{C}$. Si γ es un lazo simple nulhomólogo en Ω que no corta a $P_f \cup f^{-1}(w_0)$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)-w_0}\,dz = \sum_{f(w)=w_0} \mu(f,w)\,w$$

En particular, si f es inyectiva Ω y toma allí el valor w_0,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)-w_0}\,dz = f^{-1}(w_0).$$

Notemos que por el Teorema IV.4.4, si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa e inyectiva, es biholomorfa sobre su imagen, y luego la fórmula anterior da una expresión integral para la inversa de f.

Demostración. En este caso, como f es holomorfa, es $P_f = \varnothing$, y luego por el Teorema 5.1, la integral en el enunciado de la proposición es igual a $\sum_{f(w)=w_0} \mu(f,w)\,w$. Si además f es inyectiva en Ω, sabemos que f' no se anula en ningún punto de Ω por el Teorema IV.4.4, así $\mu(f,w) = 1$ para cada $w \in \Omega$. Más aún, por hipótesis $f(w) = w_0$ tiene una única solución en Ω, a saber, $f^{-1}(w_0)$. Esto da lo que queremos. ◀

5.1. El teorema de Rouché

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ es holomorfa no constante y si γ es un lazo simple nulhomólogo en

Ω que no pasa por ningún cero de f, la Proposición 5.2 dice que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = Z_f(\gamma)$$

donde $Z_f(\gamma)$ es el número de ceros de f en el interior de γ, contados con multiplicidad. El cálculo de una integral de esta forma es en general dificil, y suele depender, obviamente, de la disposición de los ceros de f en el interior de γ. El siguiente teorema, debido a Eugène Rouché (1832–1910), prueba que bajo ciertas condiciones el conocimiento de las disposición de los ceros de una funcion —que en general será fácil de obtener— da información sobre la disposición de los ceros de otra. Usaremos el siguiente lema para probarlo, que además deja en evidencia la naturalidad de la hipótesis del teorema.

Lema 5.4. *El semiplano cortado* $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : z \notin \mathbb{R}_{<0}\}$ *es exactamente el conjunto de números complejos* $z \in \mathbb{C}$ *que cumplen que*

$$|z-1| < |z| + 1.$$

Demostración. Si elevamos ambos lados de la desigualdad al cuadrado, luego de reescribir obtenemos que la desigualdad es equivalente a que

$$0 < \Re z + |z|.$$

Pero siempre es cierto que $|\Re z| \leqslant |z|$, con igualdad si y sólo si $\Im z = 0$. Luego lo anterior es cierto siempre si $z \notin \mathbb{R}$, y en el caso que $z \in \mathbb{R}$, es cierto si, y solamente si, $z > 0$. Esto da lo que queríamos. ◀

Enunciamos y probamos ahora el ***teorema de Rouché***.

Teorema 5.5. *Sean* $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorfas y sea* γ *un lazo simple nulhomólogo en* Ω*. Si* $|f-g| < |f| + |g|$ *sobre* γ*, entonces* f *y* g *tienen el mismo número de ceros en el interior de* γ*.*

Demostración. Como $|f-g| < |f| + |g|$ sobre γ, es el caso que f y g no se anulan sobre γ. Además, como γ es compacta, existe un entorno abierto U de γ donde f y g no se anulan, y podemos considerar la función holomorfa $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(z) = f(z)/g(z)$. Por hipótesis, $|h-1| < |h|+1$ en U, así, por el Lema 5.4, h toma valores en $\mathbb{C}^-$. Esto implica que está bien definida la función $\operatorname{Log}(h)$, y nos da una primitiva de $f'/f - g'/g$ sobre U. Deducimos entonces que

$$Z_f(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = Z_g(\gamma),$$

que completa la demostración del teorema. ◄

La siguiente versión más débil del teorema de Rouché será, en general, suficiente para la mayoría de sus aplicaciones. La idea a tener en mente es que si f es pequeña comparada con g sobre γ, en el sentido que le da la desigualdad a seguir, entonces g y $f+g$ tienen el mismo número de ceros en el interior de γ.

Corolario 5.6. *Sean $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfas y sea γ un lazo simple nulhomólogo en Ω. Si $|f| < |g|$ sobre γ, entonces g y $f+g$ tienen el mismo número de ceros en el interior de γ.*

Demostración. Las funciones $F = f+g$ y $G = g$ cumplen que $|F-G| < |G| \leqslant |F|+|G|$ sobre la curva γ, así la afirmación se sigue del teorema de Rouché. ◄

Podemos dar ahora otra demostración del teorema fundamental del Álgebra. Tomemos un polinomio no constante

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$$

y sea $R = \max\{|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|, 1\}$. Si $|z| > R$, entonces

$$|p(z) - z^n| \leqslant \sum |a_i||z|^i \leqslant R|z|^{n-1} < |z|^n.$$

Luego si tomamos γ el borde de un disco $B(0,r)$ con $r > R$, el corolario al teorema de Rouché asegura que z^n y p tienen el mismo número de ceros en $B(0,r)$. Dado que z^n tiene n ceros (contados con multiplicidad), lo mismo es cierto para p.

Notemos que si γ es un lazo simple nulhomólgo en Ω y si f es holomorfa y no se anula sobre γ, entonces $\gamma_f = f \circ \gamma$ es un lazo en $\mathbb{C}$ y, por un simple cambio de variables, tenemos que

$$Z_f(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f} \frac{d\xi}{\xi} = \operatorname{Ind}(\gamma_f, 0).$$

Esto nos da, por un lado, una nueva interpretación de la fórmula de enumeración de ceros de una función holomorfa y, segundo, una

Segunda demostración del teorema de Rouché. Veamos que las hipótesis del teorema aseguran que las curvas γ_f y γ_g son homotópicas en $\mathbb{C}^\times$, por lo que la invarianza homotópica del índice prueba lo que queremos. Afirmamos que para cada t la curva

$$\gamma_t(s) = t\gamma_f(s) + (1-t)\gamma_g(s)$$

no pasa por el origen. En efecto, si esto fuera falso para algún par (s_0, t_0), tendría que ser el caso que $t_0 \in (0,1)$, pues ni γ no corta a $Z_f \cup Z_g$, y luego obtendríamos que

$$\frac{\gamma_f(s)}{\gamma_g(s)} = \frac{t}{t-1} < 0,$$

pero esto contradice que γ_f/γ_g toma valores en $\mathbb{C}^-$. Deducimos que la familia de curvas γ_t es una homtopía de lazos de γ_f a γ_g en $\mathbb{C}^\times$, por lo que $\operatorname{Ind}(\gamma_f, 0) = \operatorname{Ind}(\gamma_g, 0)$, como queríamos probar. ◀

6. Aplicaciones

6.1. La fórmula de Jacobi e inversión de Lagrange

El siguiente resultado, que expresa la invarianza de los residuos por cambios de coordenadas, se conoce como la ***fórmula de Jacobi***.

Teorema 6.1. *Sea Ω una región en $\mathbb{C}$ y sea $g : \Omega \longrightarrow \Omega'$ biholomorfa. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$*

es meromorfa en $c \in \Omega$ y si $c = g(c')$, entonces

$$\operatorname{Res}\big(f, c\big) = \operatorname{Res}\big((f \circ g)g', c'\big).$$

Demostración. Sea $\lambda = \operatorname{Res}\big(f, c\big)$. La función $h = f - \lambda(z-c)^{-1}$ admite una primitiva H en un entorno perforado de c, y luego la función $(h \circ g)g' = (f \circ g)g' - \lambda g'(g-c)^{-1}$ admite una primitiva en un entorno perforado de c'. Integrándola sobre el borde de un disco suficientemente pequeño B' con centro c', obtenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\big((f \circ g)g', c'\big) &= \int_{\partial B'} (f \circ g)(z) g'(z)\,dz \\
&= \lambda \int_{\partial B'} \frac{g'(z)}{g(z) - g(c)}\,dz \\
&= \lambda,
\end{aligned}$$

pues si B' es suficientemente pequeño g toma el valor $g(c)$ con multiplicidad 1 en el interior de B'. ◀

Consideremos ahora el problema de calcular el residuo de la funcion

$$f_{m,n}(z) = \frac{e^{nz}}{(1 - e^{-z})^{m+1}}$$

en el origen, donde $m, n \in \mathbb{N}_0$. Dado que $1 - e^{-z}$ tiene una raiz simple allí y e^{nz} no se anula nunca, f tiene un polo de orden $m+1$. Podríamos intentar usar la fórmula para el cálculo de residuos en polos, pero resultaría muy complicado seguir cuenta de las derivadas. La fórmula de Jacobi nos da una solución muy fácil: podemos considerar el cambio de coordenadas $w = e^z$, que transforma nuestro problema a calcular el residuo de

$$g(w) = \frac{w^{m+n}}{(1 - w)^{m+1}}$$

en $w = 1$, y esto es inmediato, pues

$$\frac{1}{m!}\left(\frac{d}{dw}\right)^m w^{m+n} = \binom{m+n}{n}.$$

Consideremos una función $f : B \to \mathbb{C}$ holomorfa en un entorno B del origen tal que $f(0) = 0$ y su expansión en serie de potencias $f = \sum_{n\geqslant 1} f_n z^n$ allí. Si $f_1 \neq 0$ sabemos que f es localmente biholomorfa, esto es, existe un entorno $B' \subseteq B$ del origen y una función holomorfa $g : f(B') \to B'$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_{f(B')}$ y $g \circ f = \mathrm{id}_{B'}$. Si $g = \sum_{n\geqslant 1} g_n z^n$, podemos obtener el coeficiente de n-ésimo g_n usando la fórmula de Jacobi. El resultado final se conoce como la ***fórmula de inversión de Lagrange***.

Teorema 6.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que*

$$[z^n]\, g = [z^{n-1}](h^{n+1} f') = \frac{1}{n}[z^{n-1}]\, h^n.$$

donde $h = z/f$.

Aquí $[z^n]$ da el n-ésimo coeficiente de una serie.

Demostración. Tomemos $n \in \mathbb{N}$, y empezemos notando que g_n es el coeficiente de z^{-1} en g/z^{n+1}, es decir, $\mathrm{Res}\big(g/z^{n+1}, 0\big)$. Si consideramos ahora la funcíon biholomorfa f, obtenemos de la fórmula de Jacobi que

$$g_n = \mathrm{Res}\big(g(f) f'/f^{n+1}, 0\big) = \mathrm{Res}\big(z f'/f^{n+1}, 0\big).$$

Pero f tiene una raíz simple en 0, así zf'/f^{n+1} tiene un polo de orden n en 0 y podemos calcular este último residuo como

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \frac{f'}{(f/z)^{n+1}} = [z^{n-1}](h^{n+1} f').$$

Esto da la primera igualdad buscada. Para ver la segunda basta notar que $1/f^n - nf'/f^{n+1} = (z/f^n)'$, así las funciones a la izquierda tienen el mismo residuo en 0. ◀

El teorema anterior se usa para despejar coeficientes de una ecucación que involucra una serie de potencias f de forma implícita; tal ecuación se obtiene, en general, por argumentos enumerativos que involucran a los coeficientes de f, que suelen originarse también de un problema enumerativo.

A modo de ejemplo, consideremos el problema de determinar el número c_n de $2n$-uplas de $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{2n}) \in \{1,-1\}^{2n}$ con suma cero tal que $\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_i \geqslant 0$ para cada $i \in \{1,\ldots,2n\}$. En particular es $c_0 = 1$. El lector puede pensar que queremos determinar todos los caminos de $(0,0)$ a $(2n,0)$ en el plano compuestos por vectores $(1,1)$ ó $(1,-1)$ que nunca pasan debajo del eje x. Tales caminos se conocen como caminos de Dyck, en honor al matemático Walther von Dyck.

Formemos la serie de potencia $c(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$. Es relativamente sencillo probar que $c(z) = 1 + zc(z)^2$ usando la interpretación combinatoria que le dimos a los coeficientes de c, y si ahora consideramos la serie $f(z) = c(z) - 1$, tenemos que $f(z) = z(f(z)+1)^2$ o, lo que es lo mismo, que f es la inversa funcional de $g(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$. Esto prueba, en particular, que f es holomorfa en algún entorno del origen pues g es holomorfa en 0 $g'(0) \neq 0$. Así $z/g(z) = h(z)^n = (z+1)^{2n}$, y el coeficiente de z^{n-1} aquí es $\binom{2n}{n-1}$: redujimos el problema de calcular el coeficiente de una serie al de calcular el de un polinomio conocido. Obtenemos para cada $n \in \mathbb{N}$ que

$$c_n = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Los números en la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se conocen como los ***números de Catalan***, y aparecen en una cantidad notable de problemas enumerativos, tanto de origen puramente combinatorio, como en problemas de origen algebraico.

Completar.

6.2. Cálculo de integrales y sumas mediante residuos

Completar.

Capítulo VII

El espacio de funciones holomorfas

1. El espacio $\mathscr{C}(\Omega)$

1.1. Convergencia local uniforme

Fijemos una región Ω en $\mathbb{C}$. Presentamos ahora, sin más, una de las dos nociones de convergencia en $\mathscr{C}(\Omega)$ que serán centrales en todo el capítulo.

Una sucesión de funciones (f_n) en $\mathscr{C}(\Omega)$ ***converge de forma localmente uniforme en*** Ω si todo punto $z \in \Omega$ admite un entorno U donde la sucesión de restricciones $(f_n|_U)$ converge uniformemente. Notemos que si (f_n) converge de forma localmente uniforme en Ω, define una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ y, en vista de la convergencia uniforme, esta función pertenece también a Ω.

Notemos, también, que la condición implica que (f_n) converge uniformemente en una familia de discos abiertos que cubren a Ω, y luego para todo compacto K de Ω, la sucesión de restricciones $(f_n|_K)$ converge uniformemente. Recíprocamente, dado que todo disco cerrado contiene un disco abierto más pequeño, si para todo compacto K de Ω, la sucesión de restricciones $(f_n|_K)$ converge uniformemente, entonces (f_n) converge de forma localmente uniforme en Ω.

1.2. Convergencia y metrizabilidad

En lo que sigue, diremos que una sucesion ***converge en*** $\mathscr{C}(\Omega)$ si lo hace de forma localmente uniforme. Veamos ahora que esta noción de convergencia es metrizable: existe una métrica d en $\mathscr{C}(\Omega)$ tal que una sucesión (f_n) en $\mathscr{C}(\Omega)$ converge de forma localmente uniforme si y solamente si es una sucesión de Cauchy para d.

Para cada compacto K de Ω, definimos la ***seminorma asociada a*** K: para cada $f \in \mathscr{C}(\Omega)$,

$$|f|_K = \max_{\xi \in K} |f(\xi)|.$$

El nombre seminorma se debe a que la asignación

$$f \in \mathscr{C}(\Omega) \longmapsto |f|_K \in \mathbb{R}$$

verifica todas las propiedades de una norma salvo la condición que $|f|_K = 0$ implica que f es la función nula. Obtenemos así una familia de seminormas $\mathscr{K} = \{|\cdot|_K : K \subseteq \Omega \text{ compacto}\}$.

La condición de convergencia local uniforme puede enunciarse ahora en términos de la familia $\mathscr{K}$: una sucesión (f_n) converge en $\mathscr{C}(\Omega)$ si y solamente si para todo compacto K en Ω,

$$\lim_{n,m\to\infty} |f_n - f_m|_K = 0.$$

Lema 1.1. *Existe $\mathscr{K}_0$ una subfamilia numerable de $\mathscr{K}$ tal que una sucesión (f_n) converge en $\mathscr{C}(\Omega)$ si y solamente si para toda $|\cdot|_K \in \mathscr{K}_0$,*

$$\lim_{n,m\to\infty} |f_n - f_m|_K = 0.$$

Demostración. En el Ejercicio 2.1 construímos una familia numerable de compactos crecientes $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuya unión es Ω. Sea $\mathscr{K}_0$ la familia de seminormas asociada a tal conjunto de compactos. Si K es un compacto arbitrario de Ω, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq \Omega_n$: como K es acotado y $K \cap \overline{\partial\Omega} = 0$, podemos elegir n de modo que valga simultáneamente que $d(0,K) \leqslant n$ y $d(\partial\Omega, K) \geqslant n^{-1}$.

En particular, para todo compacto K en Ω existe n tal que $|f|_K \leqslant |f|_{\Omega_n}$ para toda $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, y esto hace evidente que vale la afirmación del enunciado para nuestra elección de $\mathscr{K}_0$. ◀

Construímos ahora la métrica deseada. De hecho, definiremos una pseudonorma en $\mathscr{C}(\Omega)$ que induce la métrica correcta. Una pseudonorma sobre $\mathscr{C}(\Omega)$ es una función $\rho : \mathscr{C}(\Omega) \longrightarrow [0,\infty)$ que cumple que para $f, g \in \mathscr{C}(\Omega)$:

(1) $\rho(\lambda f) \leqslant \rho(f)$ si $|\lambda| \leqslant 1$,

(2) $\lim_{\lambda\to 0} \rho(\lambda f) = 0$,

(3) $\rho(f+g) \leqslant \rho(f) + \rho(g)$,

(4) $\rho(f) = 0$ si y sólo si $f = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada f en $\mathscr{C}(\Omega)$, sea $|f|_n = \min(1, |f|_{\Omega_n})$ y definamos $\|\cdot\|_\Omega : \mathscr{C}(\Omega) \longrightarrow [0,\infty)$ de modo que

$$\|f\|_\Omega = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f|_n 2^{-n}.$$

Dado que $|f|_n \leqslant 1$ para todo n, la serie anterior converge para cualquier elección de f en $\mathscr{C}(\Omega)$.

Proposición 1.2. *La función $\|\cdot\|_\Omega$ es una pseudonorma en $\mathscr{C}(\Omega)$, y una sucesión (f_n) converge en $\mathscr{C}(\Omega)$ si y solamente es una sucesión de Cauchy para la métrica inducida por $\|\cdot\|_\Omega$.*

Demostración. Está claro que $\|\cdot\|$ toma valores no negativos. Por otro lado, si $\|f\| = 0$ entonces $|f|_{\Omega_n} = 0$ para cada compacto Ω_n y, dado que su unión es Ω, $f = 0$ en Ω, así vale la propiedad (4). La validez de la desigualdad triangular, esto es, la propiedad (3), se deduce inmediatamente de su validez para cada una de las seminormas $|f|_n$. La propiedad (2) es mínimamente más delicada: dada $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$, podemos tomar N tal que

$$\sum_{n>N} 2^{-n} < \varepsilon$$

y a su vez tomar $\delta > 0$ para que $\delta|f|_N < 1$ y

$$\delta|f|_N \sum_{n=1}^{N} 2^{-k} < \varepsilon.$$

Esto implica que $\|\lambda f\|_\Omega < 2\varepsilon$ si $|\lambda| < \delta$, y prueba que tal propiedad se cumple, mientras que la propiedad (1) es evidente. Para ver que la métrica inducida por esta pseudonorma es la correcta, es suficiente que notemos que si (f_n) es una sucesión en $\mathscr{C}(\Omega)$ y si $\|f_n\| \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ es el caso que $|f_n|_k \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$. Por el Lema 1.1, (f_n) converge a 0 en $\mathscr{C}(\Omega)$, como queríamos ver. ◀

Notemos que $\|\cdot\|_\Omega$ no es una norma vectorial. Por otro lado, para cada f y g en $\mathscr{C}(\Omega)$, es cierto que $\|fg\|_\Omega \leqslant \|f\|_\Omega \cdot \|g\|_\Omega$, por lo que la multiplicación $\mathscr{C}(\Omega) \times \mathscr{C}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{C}(\Omega)$ es continua y, con la métrica inducida por esta pseudonorma, $\mathscr{C}(\Omega)$ es un espacio métrico completo. En lo que sigue, siempre consideraremos $\mathscr{C}(\Omega)$ munido de esta métrica. Parte de la siguiente proposición afirma que $\mathscr{O}(\Omega)$

es un subespacio cerrado de $\mathscr{C}(\Omega)$, y luego es él mismo un espacio métrico completo.

Proposición 1.3. *Sea (f_n) una sucesión en $\mathscr{O}(\Omega)$ que converge en $\mathscr{C}(\Omega)$ a f. Entonces $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, y para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión $(f_n^{(k)})$ converge a $(f^{(k)})$ en $\mathscr{O}(\Omega)$. En particular, la función $f \in \mathscr{O}(\Omega) \longmapsto f' \in \mathscr{O}(\Omega)$ es continua.*

Demostración. Sea (f_ν) una sucesión en $\mathscr{O}(\Omega)$ y supongamos que converge a f. Entonces $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ y, por el Lema III.1.8, para todo triángulo T en Ω,

$$\int_{\partial T} f\,dz = \lim_{\nu\to\infty} \int_{\partial T} f_\nu\,dz = 0,$$

en vista de que cada f_ν es holomorfa y el Teorema de Goursat. Luego f tiene integral nula sobre todo triángulo contenido en Ω, y es holomorfa por el Teorema de Morera. La segunda afirmación se sigue de las estimaciones de Cauchy en compactos, que es el contenido del Teorema IV.1.2. ◀

1.3. Independencia de la exhaución

Hasta ahora construímos una métrica en $\mathscr{C}(\Omega)$ usando una exhausción por compactos de Ω particular. Veamos que, aunque las métricas que se obtienen de distintas exhauciones son en general distintas, los abiertos que definen en $\mathscr{C}(\Omega)$ no dependen de la exhaución que elejimos.

Recordemos que $\mathscr{K}$ es la familia de todas las seminormas en $\mathscr{C}(\Omega)$ asociadas a los compactos de Ω. Para cada $\varepsilon > 0$, cada compacto K en Ω y cada $f \in CO$, definimos $U(f;K,\varepsilon) = \{g \in \mathscr{C}(\Omega) : |f-g|_K < \varepsilon\}$. Este conjunto es un ***abierto básico*** de $\mathscr{C}(\Omega)$, y el conjunto $\mathscr{U}_f = \{U(f;K,\varepsilon) :\ K$ compacto de Ω y $\varepsilon > 0\}$ es una ***base de abiertos de*** $\mathscr{C}(\Omega)$ ***en*** f.

La siguiente proposición dice que estos conjuntos, como su nombre lo indica, son abiertos, y que todo abierto de $\mathscr{C}(\Omega)$ es una unión de conjuntos de esta forma: esto da el resultado que buscamos y explica el nombre que le dimos a las colecciones de abiertos $\mathscr{U}_f$ para $f \in \mathscr{C}(\Omega)$.

Proposición 1.4. *Sea ρ una métrica definida en $\mathscr{C}(\Omega)$ usando una familia numerable de seminormas en $\mathscr{C}(\Omega)$ asociadas a una exhausión por compactos de Ω. En-*

tonces

- *para cualquier elección de $\varepsilon > 0$, de un compacto K de Ω y de $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, el conjunto $U(f;K,\varepsilon)$ es abierto y,*
- *dado $\delta > 0$ y $f \in \Omega$, existe un compacto K de Ω y $\varepsilon > 0$ tal que $U(f;K,\varepsilon) \subseteq B_\delta(f)$.*

Luego, todo abierto de $\mathscr{C}(\Omega)$ es una unión de abiertos de la forma $U(f,K,\varepsilon)$ y, en particular, los abiertos de $\mathscr{C}(\Omega)$ no dependen de nuestra elección de exhaución por compactos de Ω.

De forma más breve, cualquier par de métricas obtenidas como en la proposición son topológicamente equivalentes.

Demostración. Por comodidad, hagamos la prueba para d y $\mathscr{K}_0$: no hay pérdida de generalidad en hacerlo en este caso.

Tomemos $\varepsilon > 0$, K un compacto de Ω y $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, y veamos que el conjunto $U(f;K,\varepsilon)$ es abierto. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que K esta contenido en K_N. Pongamos $\delta = 2^{-N} \min(\varepsilon, 1)$ y tomemos $g \in B_\delta(f)$. Entonces en particular $|f-g|_N < \min(\varepsilon,1)$ y luego $|f-g|_{K_N} < \varepsilon$. Dado que $K \subseteq K_N$, esto prueba que $g \in U(f;K,\varepsilon)$, y luego que este conjunto es abierto.

Recíprocamente, dado $\delta > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\sum_{n>N} 2^{-n} < \delta/2$. Para esta elección de δ, podemos tomar $\varepsilon < 1$ de forma que si $g \in U(f;K_N,\varepsilon)$ entonces

$$\sum_{n=1}^{N} |f-g|_n 2^{-n} \leqslant |f-g|_{K_N} \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \leqslant \varepsilon \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} < \delta/2.$$

Deducimos que si $g \in U(f;K,\varepsilon)$ entonces $\|f-g\|_\Omega < \delta$, que prueba la segunda parte de la proposición. La última afirmación de la misma es ahora inmediata: resulta que todo disco abierto en $\mathscr{C}(\Omega)$ es una unión de abiertos de la forma $U(f;K,\varepsilon)$, y luego que lo mismo es cierto para un abierto arbitrario de $\mathscr{C}(\Omega)$. Esto completa la demostración. ◀

2. Familias de funciones

2.1. El teorema de Montel

Fijemos una ***familia de funciones*** en $\mathscr{O}(\Omega)$, esto es, un subconjunto $\mathscr{F}$ de $\mathscr{O}(\Omega)$. Para cada compacto K de $\mathscr{O}(\Omega)$ definimos $|\mathscr{F}|_K = \sup_{f\in\mathscr{F}} |f|_K$. La familia $\mathscr{F}$ es ***localmente acotada*** si para cada compacto K de Ω tenemos que $|\mathscr{F}|_K < \infty$, y es ***acotada*** si $|\mathscr{F}|_\Omega := \sup_{f\in\mathscr{F}} |f|_\Omega < \infty$.

Notemos que la primera condición es equivalente a la condición que para cada punto $z \in \Omega$ exista un disco B centrado en z tal que $|\mathscr{F}|_B < \infty$. Toda familia acotada es, evidentemente, localmente acotada, sin embargo, la familia de funciones $\{z, 2z^2, 3z^3, \cdots\}$ definida sobre $\mathbb{E}$ es localmente acotada y no es acotada. Toda sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en $\mathscr{O}(\Omega)$ define una familia asociada $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, y esto nos permite hablar de sucesiones localmente acotadas o acotadas.

Le recordamos al lector el siguiente teorema de Cesare Arzelà (1847-1912) y Giulio Ascoli (1843-1896), que da condiciones suficientes para que una familia de funciones en $\mathscr{C}(\Omega)$ sea precompacta.

Teorema 2.1 (de Arzelà–Ascoli)**.** *Toda familia $\mathscr{F}$ en $\mathscr{C}(\Omega)$ que es localmente acotada y localmente uniformemente equicontinua es precompacta. Esto es, toda sucesión en $\mathscr{F}$ admite una subsucesiíon convergente.*

El siguiente teorema es nuestro primer resultado básico de precompacidad en $\mathscr{O}(\Omega)$, y es uno de los teoremas de Paul A. A. Montel (1876 – 1975) que estudiaremos.

Teorema 2.2 (de Montel para sucesiones)**.** *Toda sucesión localmente acotada en $\mathscr{O}(\Omega)$ admite una subsucesión convergente.*

Basamos su demostración en una serie de lemas, el primero de ellos es un resultado usual de diagonalización para familias de funciones puntualmente acotadas, cuya demostración omitimos.

Lema 2.3. *Sea D un subconjunto numerable de Ω. Toda sucesión de funciones puntualmente acotada en Ω admite una subsucesión que converge puntualmente en D.*

Recordemos que $\mathscr{F}$ es ***localmente uniformemente equicontinua*** si para cada $c \in \Omega$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un disco $B \ni c$ en Ω tal que para toda $f \in \mathscr{F}$ vale que $\omega(f,B) = \sup_{z,w\in B} |f(z) - f(w)| \leqslant \varepsilon$. Llamamos a este número la ***oscilación de*** f ***en*** B.

Lema 2.4. *Toda familia localmente acotada en* $\mathscr{O}(\Omega)$ *es localmente uniformemente equicontinua.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ una familia localmente acotada en $\mathscr{O}(\Omega)$, y tomemos $\varepsilon > 0$ y un punto $c \in \Omega$. Por hipótesis, existe un disco B, que podemos asumir está centrado en c, tal que $|\mathscr{F}|_B < \infty$. Sea B' un disco concéntrico a B con la mitad de su radio $2r$, así $d(B', \partial B) = r$, y tomemos $z, w \in B'$. Por la fórmula de Cauchy, y la estimación estándar, resulta que

$$|f(z) - f(w)| \leqslant \frac{|z-w|}{2\pi} \left| \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - w)} d\xi \right| \leqslant |z-w| |\mathscr{F}|_B \frac{2}{r}.$$

Esto implica que si $f \in \mathscr{F}$ y $s < r$, entonces

$$\omega(f, B_s(c)) \leqslant |\mathscr{F}|_B 4 s r^{-1},$$

y basta que tomemos $s = \text{mín}(r\varepsilon(4|\mathscr{F}|_B)^{-1}, r)$ para que $\omega(f, B_s(c)) \leqslant \varepsilon$. ◀

Notemos que la familia $\{z + n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathscr{O}(\mathbb{E})$ es uniformemente equicontinua, así *a fortiori* locamente uniformemente equicontinua, pero no es localmente acotada.

En este momento podríamos apelar al teorema de Arezelà–Ascoli, pues probamos que una familia de funciones holomorfas que es localmente acotada es también locamente uniformemente equicontinua. Para que la exposición sea un poco más autocontenida, y por ser interesante en si mismo el siguiente lema, preferimos tomar el camino más largo, en el que daremos una demostración del teorema de Arezelà–Ascoli.

El último lema que necesitamos nos da aún otra una condición equivalente a la de la convergencia local uniforme de una sucesión de funciones. Una sucesión

(f_n) en $\mathscr{C}(\Omega)$ ***converge continuamente en*** Ω si para cada sucesión convergente (z_n) en Ω, existe el límite $\lim_{n\to\infty} f_n(z_n)$. Notemos que si tomamos para cada $z \in \Omega$ la sucesión constante con valor z, deducimos que toda familia que converge continuamente converge, en particular, puntualmente, y luego queda definida una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ por la receta $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ para cada $z \in \Omega$.

De hecho, vale que $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_n)$ para toda sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Ω que tienda a z, como el lector puede verificar construyendo de cualquier par de tales sucesiones una sucesión que también converge a z y tiene a las dos primeras como subsucesiones.

Lema 2.5. *Una sucesión de funciones sobre* Ω *converge continuamente en* Ω *si y solamente si converge a una función en* $\mathscr{C}(\Omega)$.

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones sobre Ω y supongamos, primero, que converge compactamente a una $f \in \mathscr{C}(\Omega)$. Dada una sucesión (z_n) en Ω que converge a $z \in \Omega$, formemos el compacto $L = \{z, z_1, z_2, \ldots\}$. Como f_n converge de forma local uniforme a f, existe $\lim |f - f_n|_L = 0$, y luego, en particular, $\lim_{n\to\infty} f(z_n) - f_n(z_n) = 0$. Como f es continua, también es cierto que $\lim_{n\to\infty} f(z) - f(z_n) = 0$ y, juntando estas dos afirmaciones, deducimos que $f_n(z_n)$ converge a $f(z)$, como queríamos probar.

Recíprocamente, supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge continuamente en Ω. Ya vimos que en ese caso existe una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_n \to f$ puntualmente. Veamos que f es continua y que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $\mathscr{C}(\Omega)$. Para ver lo primero, supongamos que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Ω que tiende a $z \in \Omega$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|f_{n_k}(z_k) - f(z_k)| < \varepsilon$ para cada $k \in \mathbb{N}$, pues para cada k fijo, $f_n(z_k) \longrightarrow f(z_k)$ cuando $n \to \infty$. Podemos ahora estimar

$$|f(z) - f(z_k)| \leqslant |f(z) - f_{n_k}(z_k)| + |f_{n_k}(z_k) - f(z_k)|.$$

Como la subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ también converge continuamente a f, deducimos junto con lo anterior que $f(z_k) \to f(z)$, que prueba que f es continua. Finalmente, veamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $\mathscr{C}(\Omega)$. Si no es el caso, existe un compacto

K de Ω de modo que $|f_n - f|_K$ no tiende a cero cuando $n \to \infty$, y podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en K, que podemos asumir converge a algún punto $z \in K$, de forma que

$$|f_n(z_n) - f(z_n)| \geqslant \varepsilon \tag{VII.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, como $z_n \to z$ y como f es continua, resulta que $f(z_n) \to f(z)$ y, como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a f continamente, es el caso que $f_n(z_n) \to f(z)$, que implica que $\lim_{n\to\infty} |f_n(z_n) - f(z_n)| = 0$, en contradicción con (VII.1). Esto concluye la demostración del lema. ◀

Podemos dar ahora la

Demostración del teorema de Montel para sucesiones. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathscr{O}(\Omega)$ que es localmente acotada. Por el Lema 2.3 existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge puntualmente en el conjunto numerable y denso A de puntos con coordenadas racionales en Ω. Para alivianar la notacion, notemos $g_k = f_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Veamos que la sucesión $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathscr{C}(\Omega)$. Para esto basta, por el Lema 2.5, probar que converge continuamente en Ω.

Tomemos entonces una sucesión $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en Ω que converge a $z \in \Omega$, y veamos que $(g_k(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Como $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es localmente acotada, el Lema 2.4 prueba que es localmente uniformemente equicontinua: dado $\varepsilon > 0$ y este $z \in \Omega$, existe un disco B con centro z tal que $\operatorname{Var}(g_k, B) \leqslant \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Podemos tomar ahora un $a \in A \cap B$, pues A es denso en Ω, y un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geqslant N$, entonces $z_k \in B$, pues $z_k \to z \in B$. Como además $(g_n(a))$ converge, podemos asumir que N es tal que $|g_n(a) - g_m(a)| \leqslant \varepsilon$ si $m, n \geqslant N$. En esta situación, resulta que $|g_n(z_n) - g_m(z_m)|$ es a lo sumo

$$|g_n(z_n) - g_n(a)| + |g_n(a) - g_m(a)| + |g_m(a) - g_m(z_m)| \leqslant 3\varepsilon$$

que prueba que $(g_k(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge, y completa la demostración del teorema. ◀

Diremos que una familia $\mathscr{F}$ en $\mathscr{C}(\Omega)$ es ***normal*** si toda sucesión de $\mathscr{F}$ admite una subsucesión convergente, es decir, si $\mathscr{F}$ es (secuencialmente) precompacta en $\mathscr{C}(\Omega)$. Así, tenemos ya demostrada una implicación del siguiente

Teorema 2.6 (de Montel para familias)**.** *Una familia en $\mathscr{O}(\Omega)$ es normal si y solamente si es localmente acotada.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ una familia en $\mathscr{O}(\Omega)$, y supongamos primero que es localmente acotada. Ciertamente toda sucesión de $\mathscr{F}$ tiene esta propiedad, y luego por el teorema de Montel para sucesiones, admite una subsucesión convergente en $\mathscr{C}(\Omega)$, que ya sabemos tiene su límite en $\mathscr{O}(\Omega)$. Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{F}$ no es localmente acotada. Podemos encontrar entonces una sucesión de puntos $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un disco B de Ω y una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{F}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ sea $|f_n(z_n)| \geqslant n$. Podemos asumir, además, que z_n converge a algún punto $z \in B$. Resulta entonces que ninguna subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede converger en $\mathscr{C}(\Omega)$, pues en particular esto implicaría que alguna subsucesión de $(f_n(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, y esto es imposible. ◀

Veamos ahora que relación hay entre las familias normales y la familia de derivadas de sus elementos. Dada una familia $\mathscr{F}$, notamos por $\mathscr{F}'$ a esta segunda familia.

Teorema 2.7. *Sea $\mathscr{F}$ una familia normal en $\mathscr{O}(\Omega)$. Entonces la familia $\mathscr{F}'$ también es normal. Por otro lado, si la familia $\mathscr{F}'$ es normal y si $\mathscr{F}$ está acotada en al menos un punto de Ω, entonces $\mathscr{F}$ es localmente acotada, y luego normal.*

Demostración. Supongamos primero que $\mathscr{F}$ es normal o, equivalentemente, que es localmente acotada, y veamos que $\mathscr{F}$ también es localmente acotada. Por las estimaciones de Cauchy sobre compactos, para cada disco cerrado B contenido en Ω existe un disco abierto $B' \supseteq B$ contenido en Ω y una constante absoluta M que depende solo de Ω, B' y B, tal que $|f'|_B \leqslant M|f|_{B'}$ para cada $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, y luego en particular para cada $f \in \mathscr{F}$. Evidentemente, esto implica que $\mathscr{F}'$ es localmente acotada si $\mathscr{F}$ lo es.

Recíprocamente, supongamos que $\mathscr{F}'$ es localmente acotada, y que $c \in \Omega$ es un punto donde $\mathscr{F}$ está acotada, es decir, tal que $\sup_{f\in\mathscr{F}} |f(c)| =: |\mathscr{F}|_c < \infty$. Fijemos un $z \in \Omega$ y tomemos un disco $B \ni z$ contenido en Ω y un camino poligonal γ_z en Ω

de z a c. Para cada $w \in B$, sea γ_w el camino de w a c que se obtiene concatenando $[z, w]$ y γ_z. De la igualdad

$$f(w) = f(c) + \int_{\gamma_w} f'(\xi) d\xi$$

y la estimación estándar deducimos que para cada $w \in B$ y cada $f \in \mathscr{F}$,

$$|f(w)| \leqslant |\mathscr{F}|_c + |\mathscr{F}'|_K L(\gamma_w),$$

donde K es el compacto $B \cup \gamma_z$. Como $L(\gamma_w) \leqslant L(\gamma_z) + r$ donde r es el radio de B, deducimos que $|\mathscr{F}|_B < \infty$, como queríamos. ◀

La hipótesis de que $\mathscr{F}$ esté acotada en al menos un punto es necesaria: la familia de funciones constantes $\{n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathscr{O}(\mathbb{C})$ no es localmente acotada, sin embargo lo es, trivialmente, su familia de derivadas.

Los siguientes son ejemplos de familias normales; el lector debe probar que este es el caso para cada uno de ellos. ¿Cuáles de ellas son cerradas, y luego compactas?

(1) $\{z \in \mathbb{E} \longmapsto z^n \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$,

(2) $\{z \in \mathbb{C} \longmapsto n^{-1} z \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$,

(3) $\{f \in \mathscr{O}(\Omega) : |f| \leqslant M\}$ donde $M > 0$ es una constante fija,

(4) $\{f \in \mathscr{O}(\Omega) : \Re(f) > 0\}$,

(5) $\{z \in \mathbb{E} \longmapsto \eta \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \in \mathbb{E} : a \in \mathbb{E}, \eta \in \partial\mathbb{E}\}$, la familia de automorfismos de $\mathbb{E}$,

(6) $\{f \in \mathscr{O}(\mathbb{E}) : |f^{(n)}(0)| \leqslant Mn!$ para todo $n \in \mathbb{N}\}$ donde $M > 0$ es una constante fija.

2.2. Otros teoremas clásicos

El siguiente criterio es útil para probar que una sucesión de funciones en $\mathscr{O}(\Omega)$ converge a otra.

Teorema 2.8 (Criterio de convergencia de Montel)**.** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión localmente acotada en $\mathscr{O}(\Omega)$. Si existe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ tal que toda subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge en $\mathscr{C}(\Omega)$ converge a f, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f.*

Demostración. Supongamos que no. Existe entonces un compacto K en Ω, un $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, vale que $|f - f_{n_k}| \geqslant \varepsilon$. Esta subsucesión también es localmente acotada, y luego admite una subsucesión convergente que, por hipótesis, debe converger a f en $\mathscr{C}(\Omega)$, que contradice que $|f - f_{n_k}| \geqslant \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. ◂

Veamos como usarlo para demostrar el próximo teorema que probaron independientemente Giuseppe Vitali (1875–1932) en [18] y M. B. Porter en [12].

Teorema 2.9. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión localmente acotada en $\mathscr{O}(\Omega)$. Si el conjunto $A = \{z \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(z) \text{ existe}\}$ admite un punto de acumulación en Ω, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathscr{O}(\Omega)$.*

Demostración. Es suficiente que probemos, por el criterio de Montel, que todas las subsucesiones convergentes de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a una misma función en $\mathscr{O}(\Omega)$, y esto es inmediato por el teorema de la identidad. ◂

Lema 2.10. *Sea B un disco con centro c y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de funciones holomorfas en B. Son equivalentes*

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathscr{O}(B)$,

(2) Existe un punto $c \in B$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ la sucesión de derivadas $(f_n^{(k)}(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Demostración. Ya sabemos que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathscr{O}(B)$ lo mismo es cierto para las sucesion de sus derivadas, así (1) $\Longrightarrow$ (2). Para ver que (2) $\Longrightarrow$ (1), notamos primero que podemos asumir que B es el disco unidad y que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n| \leqslant 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un desarrollo en serie de Taylor

$$f_n(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_{nk} z^k,$$

y por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n := \lim_{k\to\infty} a_{nk}$. Las desigualdades de Cauchy aseguran que $\sup_{k,n} |a_{nk}| \leqslant 1$, así $\sup_k |a_k| \leqslant 1$, y luego

$$f(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k$$

define una función holomorfa en $\mathbb{E}$. Afirmamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f. En efecto, tomemos $0 < r < 1$ y sea $\varepsilon > 0$. Existe $N > 0$ tal que $(1-r)^{-1}2r^N < \varepsilon$ y, como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} |a_{nk} - a_n| r^k = 0,$$

podemos tomar N' de forma que esta suma sea también menor a ε si $n > N'$. Obtenemos entonces que si $n > N'$,

$$|f - f_n|_{B_r} \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |a_{nk} - a_n| r^k + 2\frac{r^N}{1-r} < 2\varepsilon.$$

Como todo compacto de $\mathbb{E}$ esta en algún disco B_r con $0 < r < 1$, esto prueba lo que queríamos. ◀

Es esencial asumir que la sucesión es acotada en el teorema anterior: la sucesión en $\mathscr{O}(\mathbb{E})$ con término general $f_n(z) = (nz)^n$ no converge puntualmente en ningún punto de $\mathbb{E}$, sin embargo para cada $k \in \mathbb{N}$ vale que $f_n^{(k)}(0) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Estamos en condiciones de probar el siguiente teorema de Vitali, que enunciamos —como en [15]— en una forma cuya similaridad al teorema de la identidad es obvia.

Teorema 2.11 (de Vitali)**.** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión localmente acotada en $\mathscr{O}(\Omega)$. Son equivalentes*

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en* $\mathscr{O}(\Omega)$.

(2) Existe un punto $c \in \Omega$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ la sucesión de derivadas $(f_n^{(k)}(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(3) *El conjunto* $A = \{z \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ *existe*$\}$ *admite un punto de acumulación en* Ω.

Demostración. Ya observamos que (1) $\implies$ (2). Por otro lado, (2) $\implies$ (3), pues si tomamos un disco B contenido en Ω en torno c donde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, el Lema 2.10 prueba que $B \subseteq A$. Finalmente, ya vimos que (3) $\implies$ (1) en el Teorema 2.9. ◀

Vale notar que los teoremas de Montel y de Vitali son equivalentes: ya vimos que el de Montel implica el de Vitali. Recíprocamente, vimos que toda sucesión de funciones holomorfas localmente acotada en Ω converge puntualmente sobre un conjunto denso de Ω. El teorema de Vitali asegura entonces que esta sucesión converge en $\mathscr{O}(\Omega)$ (y podemos dar una demostración del teorema de Vitali que no use el teorema de Montel!).

Teorema 2.12 (de Hurwitz). *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión convergente en* $\mathscr{O}(\Omega)$ *a una función* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *no constante. Si* $f(c) = 0$ *para un* $c \in \Omega$, *entonces existe un disco* B *en* Ω *centrado en* c *y un índice* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}_{\geqslant N}$, *el número de ceros de* f *en* B *es igual al número de ceros de* f_n *en* B.

Demostración. Existe un disco B' en Ω centrado en c tal que f no se anula en $B' \smallsetminus c$ pues f no es constante. Sea $B \subsetneq B'$ un disco con centro c y sea $m_* > 0$ tal que $|f| \geqslant m_*$ sobre ∂B. Existe N tal que si $n \in \mathbb{N}_{\geqslant N}$ entonces

$$|f - f_n|_{\partial B} < m_* < |f|_{\partial B}$$

en virtud de la convergencia local uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a f. El teorema de Rouché asegura ahora que si $n \in \mathbb{N}_{\geqslant N}$ entonces f_n y f tienen el mismo número de ceros en el interior de B. ◀

Corolario 2.13. *El límite de una sucesión de funciones nunca nulas en* $\mathscr{O}(\Omega)$ *es o bien una función idénticamente nula o bien nunca nula.*

Demostración. Supongamos que f no es idénticamente nula y es el límite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{O}(\Omega)$. Si f es constante, no hay nada que probar, así podemos asumir que f no es constante. En este caso, el teorema de Hurwitz asegura que si f tiene un cero en algún $c \in \Omega$, lo mismo es cierto para casi todas las funciones en $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que es imposible. ◀

Corolario 2.14. *El límite de una sucesión de funciones inyectivas (resp. localmente biholomorfas) en $\mathscr{O}(\Omega)$ es o bien constante o bien una función inyectiva (resp. localmente biholomorfa).*

Demostración. Supongamos primero que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones inyectivas que converge a una función f no constante, y tomemos un punto $c \in \Omega$. Entonces las funciones de la sucesión $(f_n - f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ son nunca nulas en $\Omega \smallsetminus c$ y esa sucesión converge a $f - f(c)$, que no es nunca nula pues f no es constante. Por el corolario anterior, $f - f(c)$ es nunca nula en $\Omega \smallsetminus c$. Dado que tomamos $c \in \Omega$ un punto arbitrario, esto prueba que f es también inyectiva.

Supongamos ahora que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones localmente biholomorfas que converge, como antes, a una función no constante f. En este caso la sucesión de derivadas $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f', y cada uno de sus términos es nunca nulo por ser f_n localmente biholomorfa para cada $n \in \mathbb{N}$. Como f no es constante, f' no es idénticamente nula, y luego el corolario anterior asegura que f' es, de hecho, nunca nula, así f es localmente biholomorfa, como queríamos probar. ◀

Teorema 2.15 (de inyección de Hurwitz)**.** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathscr{O}(\Omega)$ que converge a una función no constante f, y supongamos que existe $\Omega' \subseteq \mathbb{C}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(\Omega) \subseteq \Omega'$. Entonces $f(\Omega) \subseteq \Omega'$.*

Demostración. Tomemos $c \notin \Omega'$. Por hipótesis las funciones de la sucesión $(f_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ son nunca nulas en Ω. Como $f - c$ no es idénticamente nula, pues f no es constante, deducimos que es nunca nula, asi resulta que $c \notin f(\Omega)$. Dado que elejimos a $c \notin \Omega'$ de forma arbitraria, esto prueba que $f(\Omega) \subseteq \Omega'$, que es lo que queríamos. ◀

3. Una aplicación del teorema de Vitali

Usaremos ahora el teorema de Vitali para probar un resultado general sobre intercambio de integración y diferenciación.

Proposición 3.1 (Intercambio de integración y diferenciación)**.** *Sea Ω una región en $\mathbb{C}$, γ un lazo en Ω, y $f : \gamma \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función localmente acotada. Supongamos, además, que para cada $\xi \in \gamma$ la función tal que $z \in \Omega \longmapsto f(\xi, z) \in \mathbb{C}$ es holomorfa y que las integrales $\int_\gamma f(\xi, z)\,d\xi$ existen para cada $z \in \Omega$. Entonces:*

- *la función $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(z) = \displaystyle\int_\gamma f(\xi, z)\,d\xi$ es holomorfa en Ω,*
- *para cada $z \in \Omega$ existe la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z)\,d\xi$ y,*
- *para cada $z \in \Omega$, es $F'(z) = \displaystyle\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, z)\,d\xi$.*

Recordemos que ya probamos una versión más débil de este resultado en la Proposición III.2.10.

Demostración. Tomemos un disco compacto B tal que $|f|_{\gamma\times B} < \infty$. Definamos $g : [0,1] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(t, z) = f(\gamma(t), z)\gamma'(t)$, y formemos una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sumas de Riemann

$$g_n(z) = \sum g(t_{n,k}, z)\Delta s_{k,n}$$

para $\int_\gamma f(z, \xi)\,d\xi$. Cada función de la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que tiende puntualmente a F, es holomorfa por hipótesis. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $|g_n|_B \leqslant |f|_{\gamma\times B}|\gamma'|_I$. Así $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente acotada y por el teorema de Vitali converge uniformemente a F en B. Esto prueba que F es holomorfa. Además, la sucesión de derivadas $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste de sumas de Riemann para $\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z, \xi)\,d\xi$, y sabemos que converge uniformemente sobre B a F' por la Proposición 1.3. Esto concluye la demostración de esta proposición. ◀

3.1. La función Gamma de Euler

Del análisis elemental tenemos una función $\Gamma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1} e^{-u}\, du,$$

para cada $s > 0$. Además, vale que $\Gamma(1) = 1$ y que $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ para cada $s > 0$. En particular, $\Gamma(n+1) = n!$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. El siguiente teorema debido a los matemáticos daneses Harald Bohr and Johannes Mollerup, que no probaremos, caracteriza a esta función:

Teorema 3.2 (de Bohr–Mollerup)**.** *La función $\Gamma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ queda unívocamene determinada por las condiciones:*

- $\Gamma(1) = 1$,
- $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ *si* $s > 0$ *y,*
- $\log \Gamma$ *es convexa.*

Veamos como aplicar la Proposición 3.1 para extender la función Γ a una función holomorfa en el semiplano $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$, que a su vez extenderemos a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples exactamente en los enteros no positivos.

Teorema 3.3. *Para cada $z \in \mathbb{H}_+$ la integral impropia*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u}\, du,$$

existe y la función $\Gamma : \mathbb{H}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ así definida es holomorfa. Además, para cada $z \in \mathbb{H}_+$, vale que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ y que

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} \log u\, du.$$

Demostración. Por la Proposición 3.1, si tomamos $s, t \in (0,\infty)$, la función

$$f_{s,t}(z) = \int_s^t u^{z-1} e^{-u}]\, du,$$

es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Además, la familia de funciones

$$\{f_{s,t} : 0 < s < t < \infty\}$$

es localmente acotada en $\mathbb{H}_+$: en cada franja $F = \{z \in \mathbb{C} : 0 < a \leqslant \Re z \leqslant b\}$, una estimación estándar asegura que

$$|f_{s,t}|_F \leqslant \int_0^1 u^{a-1} e^{-u}\, du + \int_1^\infty u^{b-1} e^{-u}\, du.$$

Como para cualquier par de sucesiones $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0,\infty)$ que convergen a 0 e ∞ respectivamente, la sucesión $(f_{\varepsilon_n,R_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente sobre $(0,\infty)$ a Γ, el teorema de Vitali asegura que esta sucesión converge en $\mathscr{O}(\mathbb{H}_+)$ a Γ. Esto prueba, por un lado, que Γ es holomorfa y, por otro, que la derivada Γ' puede calcularse como lo afirma el enunciado: podemos aplicar la Proposición 3.1 a cada elemento de la sucesión $(f_{\varepsilon_n,R_n})_{n\in\mathbb{N}}$. La validez de la ecuación $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ para $z \in \mathbb{H}_+$ se deduce de su validez en $(0,\infty)$ y el teorema de la identidad. ◀

Corolario 3.4. *Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, la función*

$$\Gamma_n : z \in \{z \in \mathbb{C} : \Re z > -n\} \longmapsto \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \in \mathbb{C}$$

es meromorfa con polos simples en los enteros $0,-1,\dots,-n+1$, y coincide con la función Γ en $\mathbb{H}_+$. Así, existe una función meromorfa $\Gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con $P_\Gamma = \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ tal que

- $\Gamma(1) = 1$,
- $\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u}\, du$ *si* $z \in \mathbb{H}_+$ *y*
- $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ *para todo* $z \notin \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\Gamma(z)$ está definida para $\Re z > 0$, la función del enunciado está definida para $\Re z > -n$, y la ecuación funcional de Γ prueba que coincide con $\Gamma(z)$ si $\Re z > 0$. Esta función es meromorfa y tiene polos simples en los enteros $0,-1,\dots,-n+1$, pues Γ no se anula sobre $\mathbb{N}$, y estos son todos ellos, pues Γ es holomorfa en $\mathbb{H}_+$. Finalmente, del teorema de la identidad deducimos que tenemos bien definida una función meromorfa $\Gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con $P_\Gamma = \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ con las propiedades deseadas. ◂

3.2. Fórmula de reflexión

Para continuar el estudio de la función Γ, consideramos otra función especial, la ***función Beta***. Definimos $B : (0,\infty)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$B(s,t) = \int_0^1 u^{s-1}(1-u)^{t-1}\,du.$$

Un argumento completamente análogo al que hicimos para la función Γ prueba la primera parte del siguiente resultado.

Proposición 3.5. *La función $B : \mathbb{H}_+ \times \mathbb{H}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$B(z,w) = \int_0^1 u^{z-1}(1-u)^{w-1}\,du$$

para $z, w \in \mathbb{H}_+$ es holomorfa. Además, vale que

$$\Gamma(z+w)B(z,w) = \Gamma(z)\Gamma(w)$$

para cada $z, w \in \mathbb{H}_+$.

Demostración. Como dijimos, la primera parte se deduce de un argumento análogo al que ya hicimos. Para ver la segunda parte, veamos que la igualdad vale para $s, t \in (0,\infty)$. En este caso, la versión elemental del teorema de Fubini (que ya usamos en la Proposición III.2.10), dice que

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{s-1}v^{t-1}e^{-u-v}\,dv\,du \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 u^{t+s-1}v^{s-1}(1-v)^{t-1}e^{-u}\,dv\,du \\ &= \Gamma(s+t)B(s,t),\end{aligned}$$

donde en el segundo paso usamos el cambio de coordenadas

$$(u, v) \in (0,\infty) \times (0,1) \longmapsto T(u, v) = (uv, u(1-v)).$$

Esto prueba la ecuación deseada en el caso real, y usando el teorema de la identidad deducimos que vale para cada $z, w \in \mathbb{H}_+$. ◀

Usando esto podemos probar la siguiente ***fórmula de reflexión***.

Teorema 3.6 (Fórmula de reflexión)**.** *Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, vale que*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

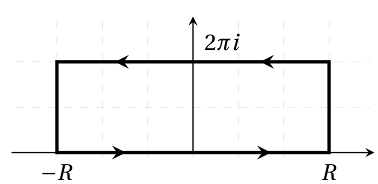
Demostración. Por el teorema de la identidad, basta con que lo probemos si $s \in (0,1)$. En tal caso $1-s \in (0,1)$ y por la Proposición 3.5, tenemos que

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = B(s,1-s) = \int_0^1 \left(\frac{u}{1-u}\right)^s \frac{du}{u}.$$

El cambio de variables $\dfrac{u}{1-u} = e^v$ transforma a esta integral en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{vs}}{1+e^v}\, dv.$$

Veamos que tiene el valor buscado usando el Teorema de los Residuos. La función meromorfa $f(z) = \dfrac{e^{sz}}{1+e^z}$ tiene un polo simple en πi con residuo $-e^{\pi i s}$. Dado $R > 0$, consideremos un rectángulo con base en $[-R, R]$ y altura $2\pi i$, como en la figura.



Como e^z tiene a $2\pi i$ como período, la contribución de la base y el lado opuesto a la integral de f sobre el rectángulo es

$$\left(1-e^{2\pi is}\right)\int_{-R}^{R}\frac{e^{vs}}{1+e^{v}}\,dv.$$

Por otro lado, las integrales sobre los dos lado restantes tienden a cero cuando $R\to\infty$ por una simple estimación y el hecho que $0<s<1$. Lo anterior junto con el Teorema de los Residuos ahora asegura que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{vs}}{1+e^{v}}\,dv=-\frac{2\pi ie^{i\pi s}}{1-e^{2\pi is}}=\frac{\pi}{\sin\pi s},$$

que es lo que queríamos probar. ◀

Podemos también calcular los residuos de Γ en sus polos, y usando la formula de reflexión, probar que no tiene ceros.

Proposición 3.7. *La función* Γ *es nunca nula y, para cada* $n\in\mathbb{N}_0$*, es* $\operatorname{Res}(\Gamma,-n)=\frac{(-1)^n}{n!}$.

Demostración. La fórmula de reflexión prueba que Γ es nunca nula: sabemos que en los enteros positivos es no nula, y que en los enteros restantes tiene polos, así que basta ver que no se anula en los puntos restantes. Pero si z no es entero, entonces $\pi/\sin\pi z\neq 0$, y luego $\Gamma(z)\neq 0$ por la fórmula de reflexión. Para probar la afirmación sobre los residuos en los polos, tomemos $n\in\mathbb{N}_0$. Calculamos

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) &= \lim_{z\to -n}(z+n)\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}\\ &= \lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)}\\ &= \frac{(-1)^n}{n!},\end{aligned}$$

como queríamos. ◀

4. El teorema de Riemann

El objetivo de esta sección es probar el siguiente teorema de Riemann.

Teorema 4.1 (de la aplicación conforme de Riemann)**.** *Todo abierto simplemente conexo de* $\mathbb{C}$ *distinto de* $\mathbb{C}$ *es biholomorfo al disco unidad.*

Dado que toda función biholomorfa es un homeomorfismo, si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y biholomorfo a $\mathbb{E}$, entonces Ω tiene que ser también simplemente conexo, así esta condición es necesaria. Por el teorema de Liouville, no existen funciones holomorfas no constantes $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{E}$, así también es necesario que Ω no sea todo $\mathbb{C}$: una de las características notables del resultado de Riemann es que prueba estas dos condiciones son también suficientes.

Recordemos que todo conjunto simplemente conexo es homológicamente simplemente conexo, y luego por (6) del Teorema V.2.8,

Lema 4.2. *Toda función holomorfa nunca nula sobre un abierto simplemente conexo admite una raíz cuadrada holomorfa.*

Digamos que un abierto Ω de $\mathbb{C}$ que contiene al origen y cumple lo anterior es un Q-dominio. La hipótesis que $0 \in \Omega$ no es restrictiva, ya que si Ω es una región con la propiedad anterior y $c \in \Omega$, una traslación por c da otra región con la misma propiedad, biholomorfa a Ω y que contiene al origen. Probaremos, de hecho, que

Teorema 4.3. *Todo* Q*-dominio de* $\mathbb{C}$ *distinto de* $\mathbb{C}$ *es biholomorfo al disco unidad.*

En particular, todo Q-dominio es simplemente conexo: es interesante que notemos que una condición algebraica sobre el álgebra de funciones $\mathscr{O}(\Omega)$, a saber, que toda unidad admita una raíz cuadrada, nos da un resultado puramente geométrico sobre Ω.

4.1. Existencia

De ahora en adelante, fijamos un Q-dominio Ω que no es $\mathbb{C}$. Notamos por t_c para $c \in \mathbb{E}$ al automorfismo involutivo de $\mathbb{E}$ tal que $t_c(z) = \frac{z-c}{\bar{c}z-1}$ para cada $z \in \mathbb{E}$. Nuestro ahora objetivo será probar que existen funciones biholomorfas $\Omega \longrightarrow \mathbb{E}$. Veamos primero que

Lema 4.4. *Existe una función holomorfa e inyectiva $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ tal que $f(0) = 0$.*

Demostración. Tomemos $a \notin \Omega$, y sea $g(z) = z - a$. Como g es nunca nula en Ω, admite una raíz, esto es, existe $v \in \mathscr{O}(\Omega)$ tal que $v^2(z) = z - a$ para cada $z \in \Omega$. En particular, v es inyectiva y, además, $(-v)(\Omega) \cap v(\Omega) = \varnothing$. En efecto, si existieran $c, c' \in \Omega$ tal que $v(c) = -v(c')$ resultaría, al elevar al cuadrado, que $c - a = c' - a$, esto es, que $c = c'$. Pero entonces $v(c) = 0$, que es imposible.

Como el conjunto $(-v)(\Omega)$ es abierto y no vacío, existe un disco B tal que $v(\Omega)$ está contenido en $\mathbb{C} \smallsetminus \overline{B}$, digamos que $B = B(w, r)$. La función

$$g(z) = \frac{r}{2}\left(\frac{1}{z - c} - \frac{1}{v(0) - c}\right)$$

es holomorfa y lleva $\mathbb{C} \smallsetminus \overline{B}$ a $\mathbb{E}$ de forma inyectiva. La función buscada es entonces $f = g \circ v$. ◀

Resulta ahora que la familia de funciones

$$\mathscr{F}(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{E} : f \text{ holomorfa, inyectiva con } f(0) = 0\}$$

es no vacía. La función biholomorfa $\Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ deseada puede obtenerse resolviendo un problema extremal sobre $\mathscr{F}(\Omega)$:

Proposición 4.5. *Si $w \in \Omega$ no es el origen, toda función en $\mathscr{F}(\Omega)$ que maximiza el funcional*

$$\begin{aligned} |\mathrm{ev}_w| : \mathscr{F}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto |f(w)| \end{aligned}$$

es sobreyectiva y luego biholomorfa.

Daremos la demostración en varios pasos. Por el momento, veamos la utilidad que tienen el teorema de Montel y los teoremas de Hurwitz que obtuvimos en las secciones anteriores en nuestro contexto.

Lema 4.6. *La familia $\mathscr{F}(\Omega)$ es localmente acotada, de hecho, es acotada. Además, es cerrada, y luego $\mathscr{F}(\Omega)$ es compacto. Así, existen funciones en $h \in \mathscr{F}(\Omega)$ que resuelven el problema extremal de la Proposición 4.5.*

Demostración. Dado que toda función de $\mathscr{F}(\Omega)$ toma valores en $\mathbb{E}$, esta familia es evidentemente acotada. El teorema de Montel asegura entonces que $\mathscr{F}(\Omega)$ tiene clausura compacta en $\mathscr{O}(\Omega)$. Por otro lado, el Teorema 2.15 y el Corolario 2.14 prueban que la familia $\mathscr{F}(\Omega)$ es cerrada. ◀

Tomemos ahora un Q-dominio $\Omega' \subseteq \mathbb{E}$. Una función $f \in \mathscr{F}(\Omega')$ se dice una ***expansión*** si para todo $z \in \Omega'$ distinto de 0, vale que $|f(z)| > |z|$. Construiremos expansiones propias usando el siguiente lema.

Lema 4.7. *Sea $s : z \in \mathbb{E} \longmapsto z^2 \in \mathbb{E}$ y sea $c \in \mathbb{E}$. Entonces $\psi_c = t_{c^2} \circ s \circ t_c$ es una* contracción*, esto es, cumple que $\psi_c(0) = 0$ y que $|\psi_c(z)| < |z|$ si $z \in \mathbb{E}$ y $z \neq 0$.*

Demostración. Como s no es un automorfismo de $\mathbb{E}$, ψ_c en particular no es una rotación, así podemos concluir lo que queremos por el Lema de Schwarz. ◀

Lema 4.8. *Sea $c \in \mathbb{E}$ tal que $c^2 \notin \Omega'$ y sea $v \in \mathscr{O}(\Omega)$ la raíz cuadrada de la restricción $t_{c^2}|_{\Omega'}$ con $v(0) = c$. Entonces*

- *$\kappa = t_c \circ v : \Omega' \longrightarrow \mathbb{E}$ es una expansión.*
- *$\psi_c \circ \kappa = \mathrm{id}_{\Omega'}$.*

Demostración. Como t_{c^2} no se anula en Ω y $t_{c^2}(0) = c^2$, v existe y está bien definida, y como $v(\Omega) \subseteq \mathbb{E}$, también lo está κ, que cumple que $\kappa(\Omega) \subseteq \mathbb{E}$ y $\kappa(0) = 0$. Como $t_c \circ t_c = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ y como $s \circ v = t_{c^2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\psi_c \circ \kappa &= t_{c^2} \circ s \circ t_c \circ t_c \circ v \\
&= t_{c^2} \circ s \circ v \\
&= t_{c^2} \circ t_{c^2} \\
&= \mathrm{id}_{\Omega}
\end{aligned}$$

que prueba que κ es inyectiva. Además, como ψ_c es una contracción, si $z \neq 0$ tenemos que

$$|z| = |\psi_c(\kappa(z))| < |\kappa(z)|,$$

que prueba que κ es una expansión. ◀

Podemos dar ahora la

Demostración de la Proposición 4.5. Ya probamos que existe una función $f \in \mathscr{F}(\Omega)$ que maximiza a $|\mathrm{ev}_w|$, es decir, que cumple que $|f(w)| \geqslant |g(w)|$ para toda otra $g \in \mathscr{F}(\Omega)$. Supongamos que $f(\Omega) = \Omega'$ no es todo $\mathbb{E}$. Como f es inyectiva, Ω y Ω' son biholomorfos, así Ω' también es un Q-dominio. Como $\Omega' \neq \mathbb{E}$, podemos tomar $c \in \mathbb{E}$ tal que $c^2 \notin \Omega'$, y el Lema 4.8 prueba que existe una expansión inyectiva $\kappa : \Omega' \longrightarrow \mathbb{E}$. Así $h = \kappa \circ f \in \mathscr{F}(\Omega)$, y como $f(0) = 0$ y f es inyectiva, resulta que $f(w) \neq 0$. Todo esto implica que

$$|h(w)| = |\kappa(f(w))| > |f(w)|,$$

y contradice el hecho que f maximiza a $|\mathrm{ev}_w|$. Deber ser el caso, entonces, que f es sobreyectiva. ◀

Queda demostrado así el Teorema 4.3. Podemos obtener ahora una extensión del Teorema V.2.8.

Teorema 4.9. *Sea Ω una región en $\mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones sobre Ω son equivalentes:*

(1) Ω es homológicamente simplemente conexa,

(2) Toda función holomorfa en Ω es integrable,

(3) La fórmula de Cauchy V.3 vale para toda $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ y todo lazo en Ω,

(4) El interior de todo lazo en Ω está contenido en Ω,

(5) Toda unidad de $\mathscr{O}(\Omega)$ admite un logaritmo holomorfo en Ω,

(6) Toda unidad de $\mathscr{O}(\Omega)$ admite una raiz holomorfa en Ω.

(7) $\Omega = \mathbb{C}$ *o bien* Ω *es biholomorfa al disco unidad.*

(8) Ω *es simplemente conexa.*

4.2. Unicidad

El siguiente teorema extiende el Teorema 4.3 para incluir un resultado de unicidad. Recordemos que Ω es una Q-región que no es todo $\mathbb{C}$.

Teorema 4.10. *Para cada* $c \in \Omega$ *existe una única función biholomorfa* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ *tal que* $f(c) = 0$ *y* $f'(c) > 0$.

Demostración. Sea g otra función biholomorfa $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ tal que $g(c) = 0$ y $g'(c) > 0$, y consideremos la función biholomorfa $h = f \circ g^{-1} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$. Como $h(0) = 0$, el Lema de Schwarz asegura que h es una rotación por algún $\lambda \in \partial E$, y en este caso $h'(0) = f'(c)/g'(c) = \lambda > 0$, así $\lambda = 1$ y h es la identidad, esto es $f = g$.

Basta entonces ver que existe una función biholomorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ tal que $f(c) = 0$ y $f'(c) > 0$. Podemos asumir que $c = 0 \in \Omega$, y en ese caso ya sabemos que existe una tal h al menos con $h(0) = 0$. Si $h'(0) = |h'(0)|e^{i\theta}$ entonces $f = e^{-i\theta}h : \Omega \longrightarrow \mathbb{E}$ es biholomorfa y cumple que $f(0) = 0$ y que $f'(0) = e^{-i\theta}h'(0) = |h'(0)| > 0$. ◀

Completar.

5. Series de funciones

5.1. Convergencia normal

La segunda noción de convergencia que consideraremos involucra series de funciones, y nos permitirá, por un lado, probar que muchas series de funciones holomorfas son ellas mismas holomorfas y, por otro, construir funciones holomorfas o funciones meromorfas usando funciones holomorfas y meromorfas conocidas: es esta la razón principal por la que esta noción de convergencia nos resulta importante. Llevaremos adelante esta última

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathscr{C}(\Omega)$. Decimos que la serie $\sum f_n$ ***converge normalmente en*** Ω si todo punto z de Ω admite un entorno abierto U tal que

$\sum |f_n|_U < \infty$. Por abuso de lenguaje, diremos que una sucesión converge normalmente en $\mathscr{C}(\Omega)$ cuando la serie asociada a ella converja normalmente en $\mathscr{C}(\Omega)$.

Nuestra definicion de convergencia normal es local, pero un argumento directo prueba que es equivalente a la condición que $\sum |f_n|_K < \infty$ para cada compacto K de Ω: la palabra "normal" hace referencia aquí a la familia de seminormas en Ω definidas por la familia de compactos de Ω, y no al uso común de la palabra.

Por el teorema de Weierstrass, si una serie converge normalmente en Ω, converge de forma localmente uniforme, así el límite de una serie que converge normalmente en Ω es continuo y, como dijimos antes, si cada término de la suma es una función holomorfa, también lo es la suma. Las estimaciones de Cauchy en compactos prueban, por otro lado, que si $\sum f_n$ converge normalmente, lo mismo es cierto para $\sum f_n'$. Dejemos registro de esto en la siguiente proposición:

Proposición 5.1. *Toda serie de funciones en $\mathscr{O}(\Omega)$ que converge normalmente en Ω define una función holomorfa en $\mathscr{O}(\Omega)$. Además, si $\sum f_n$ converge normalmente en $\mathscr{O}(\Omega)$ a f, la serie $\sum f_n'$ que se obtiene derivando término a $\sum f_n$ converge normalmente a f'.*

La siguiente proposición muestra que la convergencia normal es estable respecto a las operaciones usuales que hacemos sobre series:

Proposición 5.2. *Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathscr{C}(\Omega)$ que convergen normalmente en Ω con sumas f y g, respectivamente. Entonces*

(1) la sucesión $(f_n + g_n)$ converge normalmente en Ω a $f + g$,

(2) si $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones donde cada producto del conjunto $\{f_i g_j, (i, j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ aparece exactamente una vez, entonces converge normalmente en Ω al producto fg y,

(3) si $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una biyección, la sucesión $(f_n^\sigma)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_n^\sigma = f_{\sigma(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ converge normalmente en Ω, y también converge a f.

Una sucesión $(f_n^\sigma)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el último ítem de la proposición se dice un ***reordenamiento de*** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración. Ver el apéndice. ◄

5.2. Series de funciones meromorfas

Fijemos ahora una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{M}(\Omega)$. Diremos que la serie $\sum f_n$ ***converge en*** $\mathscr{M}(\Omega)$ si para cada compacto $K \subseteq \Omega$ existe $m = m_K$ tal que si $n > m$ la función f_n no tiene polos en K y la serie de funciones holomorfas $\sum_{n\geqslant m} f_n$ converge uniformemente en K.

Así, la serie $\sum f_n$ converge en $\mathscr{M}(\Omega)$ si para cada compacto K de Ω podemos quitar finitos términos de ella forma que los restantes no tiene polos en K, y la serie que forman —que consiste de funciones holomorfas en K— converge uniformemente en K.

Diremos que la serie ***converge normalmente en*** $\mathscr{M}(\Omega)$ si para cada compacto K de Ω se cumple la condición anterior de *dispersión de polos en* K y la serie restante converge normalmente en K. Está claro, como antes, que si una serie converge normalmente en $\mathscr{M}(\Omega)$ entonces converge en $\mathscr{M}(\Omega)$.

Proposición 5.3. *Supongamos que la serie $\sum f_n$ converge (normalmente) en $\mathscr{M}(\Omega)$. Entonces existe una única $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ con la siguiente propiedad: para cada abierto $U \subseteq \Omega$ con clausura compacta en Ω existe $F \in \mathscr{O}(U)$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $f|_U = f_1|_U + \cdots + f_m|_U + F$. En particular, $P_f \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_{f_n}$. Más aún, $P_{f_n} \cap P_{f_m} = \varnothing$ siempre que $m \neq n$, entonces vale la igualdad.*

Demostración. Tomemos $U \subseteq \Omega$ un abierto con clausura compacta. La condición de dispersión de polos asegura que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que la serie $F = \sum_{n>m} f_n$ converge (normalmente) en U, y dado que sus sumandos son holomorfos en U, lo mismo es cierto para F. Definimos $f_U \in \mathscr{M}(U)$ por $f_U = f_1|_U + \cdots + f_m|_U + F$. Definimos ahora $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ tal que $f|_U = f_U$ para cada abierto con clausura compacta en Ω: esto está bien definido, pues si tomamos V otro abierto relativamente compacto tal que $U \cap V$ es no vacío, entonces el teorema de la identidad asegura que $f_{U\cap V} = f_U|_{U\cap V} = f_V|_{U\cap V}$. Está claro que f así construída cumple la condición pedida, y además es holomorfa en $\Omega \smallsetminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_{f_n}$. La última afirmación de la proposición se sigue inmediatamente de la expresión de f en los abiertos precompactos de Ω. ◀

Como es costumbre, notamos por $f = \sum f_n$ a la función meromorfa de la proposición anterior. El siguiente resultado se deduce inmediatamente de las estimaciones de Cauchy en compactos.

Proposición 5.4. *Si una serie $\sum f_n$ converge (normalmente) en $\mathscr{M}(\Omega)$ y tiene suma f, entonces la serie de derivadas $\sum f_n'$ converge (normalmente) en $\mathscr{M}(\Omega)$ y tiene suma f'.*

Demostración. Sea $U \subseteq \Omega$ abierto y relativamente compacto y tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{m>n} f_n$ tiene sus sumandos en $\mathscr{O}(U)$ y converge (normalmente) allí a $F \in \mathscr{O}(U)$. Sabemos entonces que $\sum_{m>n} f_n'$ converge (normalmente) en $\mathscr{O}(U)$ y tiene suma F'. Esto prueba que la serie $\sum f_n'$ converge (normalmente) en $\mathscr{M}(\Omega)$, y que su suma g cumple que

$$g\,|_U = f_1'\,|_U + \cdots + f_m'\,|_U + F' = f'\,|_U$$

para todo abierto U relativamente compacto de Ω, donde m depende, naturalmente, de U. Deducimos que $g = f'$ del teorema de la identidad. identidad. Esto completa la demostración de la proposición. ◀

6. Las series de Eisenstein

Capítulo VIII

Teoremas de representación y de aproximación

The awareness that there exist entire functions with “arbitrarily” prescribed zeros revolutionized the thinking of function theorists. Suddenly one could “construct” holomorphic functions that were not even hinted at in the classical arsenal. Of course, this freedom does not contradict the solidarity of value behavior of holomorphic functions required by the identity theorem: the “analytic cement” turns out to be pliable enough to globally bind locally prescribed data in an analytic way.

Reinhold Remmert en [15]

1. Productos infinitos

Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Queremos definir la noción de convergencia del producto infinito de esta sucesión. La primera patología que encontramos es que, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z_n = 0$, entonces la sucesión de productos parciales de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente nula, y luego converge a 0. Por otro lado, puede suceder que (z_n) tenga producto nulo cuando ninguno de sus factores sea nulo, por ejemplos si $z_n = 1/2$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Diremos entonces que el producto $\prod_{n\in\mathbb{N}} z_n$ ***converge*** si existe n_0 tal que la sucesión $(z_n)_{n\geqslant n_0}$ consiste de términos no nulos y la sucesión de productos parciales $p_n = z_{n_0}\cdots z_{n-1}z_n$ converge a un límite z_* no nulo. En tal caso, diremos que $\prod z_n$ es ***convergente*** y definimos el ***producto*** de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $z_1\cdots z_{n_0-1}z_*$. La demostración de la siguiente proposición es fácil y la omitimos.

Proposición 1.1. *Si $\prod_{n\in\mathbb{N}} z_n$ converge entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$. Además, si este producto es convergente, converge a cero si y solamente si algún factor es cero.*

La proposición anterior dice que toda sucesión (z_n) con producto convergente puede escribirse en la forma $z_n = 1 + w_n$ donde $w_n \to 0$ y, más aún, tal que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $|w_n| \leqslant 1/2$ para todo $n > n_0$.

Proposición 1.2. *Si (f_n) converge a f en $\mathscr{C}(\Omega)$ entonces $(\exp f_n)$ converge a $\exp f$ en $\mathscr{C}(\Omega)$.*

Demostración. Vale que $|\exp z - 1| \leqslant 2|z|$ si $|z| \leqslant 1/2$. Dado $K \subseteq \Omega$ compacto, tomemos $n_0 \in n$ tal que $|f_n - f|_K \leqslant 1/2$ si $n > n_0$. Entonces para tales índices,

$$|\exp f - \exp f_n|_K \leqslant 2|\exp f|_K |f - f_n|_K.$$

Podemos ahora hacer $n \to \infty$ y concluir. ◀

Tomemos ahora una sucesión (f_n) en $\mathscr{C}(\Omega)$. Decimos que el producto $\prod f_n$ converge en $\mathscr{C}(\Omega)$ si para cada compacto $K \subseteq \Omega$ existe un índice $m = m_K$ tal que la sucesión de productos parciales $f_m \cdots f_{n-1} f_n$ converge uniformemente en K a una función no nula. Así para cada $z \in \mathbb{C}$ el producto $\prod f_n(z)$ converge, y tenemos definida una función $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, que notamos por $\prod f_n$. En particular, esto implica que la sucesión (f_n) tiende a 1 en $\mathscr{C}(\Omega)$. Además, ya sabemos que

Proposición 1.3. *Si (f_n) es un sucesión en $\mathscr{O}(\Omega)$ tal que $\prod f_n$ converge en $\mathscr{C}(\Omega)$ a una función límite f, entonces $f \in \mathscr{O}(\Omega)$.*

El siguiente resultado, aunque en general inútil en la práctica, relaciona la convergencia de productos infinitos con la de sumas.

Proposición 1.4. *Sea (f_n) una sucesión en $\mathscr{C}(\Omega)$ y K un compacto en Ω. Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ la función $f_n|_K$ admite un logaritmo h_n de forma que $h = \sum_{n>n_0} h_n$ converge uniformemente en K. Entonces $\prod f_n$ converge uniformemente en K a $f = f_1 \cdots f_{n_0} \exp h$.*

Demostración. Como $\exp h_n = f_n$ sobre K para $n > n_0$ y como la serie $\sum_{n>n_0} h_n$ converge uniformemente sobre K, la sucesión $(f_n)_{n>n_0}$ tiene producto uniformemente convergente a $\exp h$ sobre K por la Proposición 1.2. Como $\exp h \neq 0$, obtenemos lo que queríamos. ◀

Un producto $\prod(1+g_n)$ de términos en $\mathscr{C}(\Omega)$ ***converge normalmente*** en $\mathscr{C}(\Omega)$ si la serie $\sum g_n$ converge normalmente en $\mathscr{C}(\Omega)$.

Teorema 1.5. *Si $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n$ es un producto en $\mathscr{C}(\Omega)$ que converge normalmente, existe $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ tal que todo reordenamiento $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n^\sigma$ converge normalmente a f. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$, entonces $f \in \mathscr{O}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $K \subseteq \Omega$ compacto, y pongamos $f_n = 1 + g_n$. Existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|g_n|_K \leqslant 1$ para todo $n > n_0$ pues $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $\mathscr{O}(\Omega)$. Si $|z| \leqslant 1$ entonces $|\log(1+z)| \leqslant 2|z|$, y entonces

$$\sum_{n>n_0} |\log f_n|_K \leqslant 2 \sum_{n>n_0} |g_n|_K < \infty$$

así la sucesión $(\log f_n)_{n>n_0}$ converge normalmente en K. Por la Proposición 1.4, $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge en $\mathscr{C}(\Omega)$ a una función f y, por la Proposición VII.5.2, cualquier reordenamiento $(\log f_n^\sigma)_{n>n_0}$ converge normalmente en K al mismo límite que $(\log f_n)_{n>n_0}$, así todo reordenamiento $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n^\sigma$ converge normalmente a f por lo que acabamos de demostrar. Finalmente, si cada $f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$, nuestra demostración prueba que $f \in \mathscr{O}(\Omega)$. ◂

El siguiente resultado es el análogo para productos de la Proposición VII.5.3. En seguida veremos como ambos resultados están relacionados a través de las derivadas logarítmicas.

Proposición 1.6. *Sea (f_n) una sucesión de funciones no nulas en $\mathscr{O}(\Omega)$ con producto f normalmente convergente. Entonces $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ es no nula, vale que $Z_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_{f_n}$ y, para cada $z\in\Omega$, $o_f(z) = \sum o_{f_n}(z)$.*

Notemos que la última suma es finita en virtud de nuestra definición de convergencia.

Demostración. Tomemos $c \in \Omega$. Como $\prod f_n(c)$ converge, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(c) \neq 0$ si $n > n_0$. Ya sabemos, además, que $F = \prod_{n>n_0} f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ y $F(c) \neq 0$. Como $f = f_1 f_2 \cdots f_{n_0} F$, resulta que $o_c(f) = o_c(f_1) + \cdots + o_c(f_{n_0})$. Esto prueba que $Z_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_{f_n}$ y que $f \neq 0$, pues para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto Z_{f_n} es a lo sumo numerable, y luego lo es Z_f. ◂

Dada una función entera f, su derivada logarítmica f'/f es una función meromorfa, y si g es otra función entera, la derivada logarítmica de fg es $f'/f + g'/g$. Esto puede extenderse a productos infinitos de funciones holomorfas.

Proposición 1.7. *Sea $f = \prod_{n\in\mathbb{N}} f_n$ una producto que converge normalmente en $\mathscr{O}(\Omega)$. Entonces la serie de funciones meromorfas $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n/f_n'$ converge normalmente en $\mathscr{M}(\Omega)$ y representa la derivada logarítmica f'/f.*

Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 1.8. *La sucesión $\hat{f}_n = \prod_{m\geqslant n} f_m$ converge a 1 en $\mathscr{O}(\Omega)$.*

Demostración. Podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{f}_k$ es no nula. En tal caso su conjunto Z de ceros es discreto en Ω, y los productos parciales $p_n = f_k f_{k+1} \cdots f_n$ no se anulan en $\Omega \smallsetminus Z$. Además $\hat{f}_n = \hat{f}_k p_n^{-1}$ y p_n^{-1} converge a $\hat{f}_k^{-1}$ allí. Luego $\hat{f}_n$ converge a 1 en $\Omega \smallsetminus Z$, y de hecho lo hace en todo Ω por el corolario al Teorema IV.2.8, como queríamos ver. ◀

Damos ahora con la

Demostración de la Proposición 1.7. Con la misma notación del lema, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escribir $f = f_1 f_2 \cdots f_{n-1} \hat{f}_n$, así para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos la igualdad $f'/f = \sum_{i=1}^{n-1} f_i'/f_i + \hat{f}_n'/\hat{f}_n$. Por el lema, $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1 en $\mathcal{O}(\Omega)$, así la sucesión de sus derivadas converge a 0 en $\mathcal{O}(\Omega)$. Pero entonces para cada disco compacto B en Ω podemos tomar $m \in \mathbb{N}$ de modo que f_n no se anula en B para todo $n \geqslant m$, y tal que $(\hat{f}_n'/\hat{f}_n)_{n\geqslant m}$ converge a 0 en $\mathcal{O}(B)$. Esto prueba que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n/f_n'$ converge a f'/f en $\mathcal{O}(\Omega)$. Veamos que lo hace normalmente.

Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1 en $\mathcal{O}(\Omega)$, dado K un compacto de Ω podemos tomar $m \in \mathbb{N}$ tal que $\min_{z\in K} |f_n(z)| \geqslant 1/2$ para todo $n \geqslant m$, y en tal caso $Z(f_n) \cap K = \varnothing$ para todo $n \geqslant m$. Por las estimaciones de Cauchy sobre compactos, resulta que existe un entorno compacto $L \supseteq K$ y una constante absoluta M tal que $|f_n'|_K \leqslant M|f_n - 1|_L$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $|f_n'/f_n|_K \leqslant 2M|f_n - 1|_L$ para todo $n \geqslant m$, y esto prueba que $\sum_{m\geqslant n} |f_n'/f_n|_K$ converge. Esto prueba que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n/f_n'$ converge normalmente a f'/f, como queríamos probar. ◀

2. El teorema de Weierstrass

2.1. Divisores y el problema de Weierstrass

Fijemos una región Ω en $\mathbb{C}$. Dada una función holomorfa $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ no nula, podemos considerar una función $(f) : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $z \longmapsto o_z(f)$. Es natural preguntarse si toda función $\mathfrak{d} : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ puede obtenerse de esta manera. Más generalmente, dada una función meromorfa no nula $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ la misma receta define una función $(f) : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $z \longmapsto o_z(f)$, que tiene soporte en $Z_f \cup P_f$. Una función que se obtiene de esta manera se llama un ***divisor principal sobre*** Ω, y una funcion $\Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ con soporte un subconjunto discreto de Ω se dice un ***divisor sobre*** Ω. Es natural que consideremos el siguiente

Problema 3. ¿Es todo divisor un divisor princial?

Notemos por $\operatorname{Div}(\Omega)$ al conjunto de divisores sobre Ω. Dados divisores $\mathfrak{d}_0$ y $\mathfrak{d}_1$, tenemos definida una función suma $\mathfrak{d}_0 + \mathfrak{d}_1$ de modo que $z \longmapsto \mathfrak{d}_0(z) + \mathfrak{d}_1(z)$ para cada $z \in \Omega$. Esta operación hace del conjunto $\operatorname{Div}(\Omega)$ un *grupo abeliano*, esto es, un grupo cuya operación binaria es conmutativa. Un divisor se dice ***positivo*** si toma valores en $\mathbb{N}_0$, y todo divisor $\mathfrak{d}$ puede escribirse como una diferencia $\mathfrak{d}_+ - \mathfrak{d}_-$ donde $\mathfrak{d}_+$ y $\mathfrak{d}_-$ son divisores positivos.

Notemos que si podemos resolver el problema propuesto para el caso de los divisores positivos, queda probado el teorema en general: dado un divisor $\mathfrak{d}$, escribimos $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_+ - \mathfrak{d}_-$. Si f y g son holomorfas con $(f) = \mathfrak{d}_+$ y $(g) = \mathfrak{d}_-$, entonces f/g es meromofa no nula y $(f/g) = \mathfrak{d}_+ - \mathfrak{d}_-$. Podemos así reducir nuestro problema original al nuevo

Problema 4. ¿Es todo divisor positivo un divisor princial?

Tomemos un divisor positivo $\mathfrak{d}$ en Ω. El ***soporte de*** $\mathfrak{d}$ es el conjunto $\operatorname{sop}(\mathfrak{d}) = \{z \in \Omega : \mathfrak{d}(z) \neq 0\}$. Si este conjunto es finito, ciertamente podemos encontrar una función racional $f \in \Omega$ tal que $(f) = \mathfrak{d}$, así consideraremos de ahora en más divisores son soporte infinito. En tal cado, podemos disponer al conjunto $\operatorname{sop}(\mathfrak{d}) \smallsetminus \{0\}$ en una sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que d_n aparezca $\mathfrak{d}(d_n)$ veces. Llamamos a $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión correspondiente a $\mathfrak{d}$. Un producto $f = z^{\mathfrak{d}(0)} \prod_{n\in\mathbb{N}} f_n$ donde $f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ se dice un ***producto de Weierstrass para*** $\mathfrak{d}$ si

(1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función f_n se anula sólo en d_n, y lo hace alli con orden 1 y,

(2) El producto converge normalmente en $\mathscr{O}(\Omega)$.

En tal caso $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ y $(f) = \mathfrak{d}$, así basta que probemos que existen tales productos.

2.2. Los factores elementales y el caso que $\Omega = \mathbb{C}$

Veamos ahora como resolver nuestro problema en el caso que $\Omega = \mathbb{C}$. Fijemos de ahora en adelante un divisor positivo $\mathfrak{d} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ y una sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para $\mathfrak{d}$.

Lo primero que podríamos intentar construir un producto de Weierstrass para $\mathfrak{d}$ con $f_n(z) = 1 - \frac{z}{d_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, este producto no necesariamente converge normalmente: sabemos que esto depende de la sumabilidad de la serie $\sum |d_n|^{-1}$ que ciertamente puede fallar. Podemos, sin embargo, intentar incorporar términos de la forma $\exp t_n$ a cada f_n, que no modifican las raíces, para lograr la convergencia. Veamos como hacer esto.

Sea $E_0(z) = 1 - z$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$E_n(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\right).$$

Llamamos a estas funciones enteras los ***factores elementales de Weierstrass.***

Proposición 2.1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}_0$ *es* $|E_n(z) - 1| \leqslant |z|^{n+1}$ *si* $|z| \leqslant 1$.

Demostración. El caso que $n = 0$ es trivial, así que tomemos $n \in \mathbb{N}$. Es inmediato que $E_n'(z) = -z^n \exp(z + \cdots + z^n/n)$. Si tomamos ahora $t \in [0, \infty)$ y $|z| \leqslant 1$, resulta de $|\exp z| \leqslant \exp|z|$ que $|E_n'(tz)| \leqslant -|z|^n E_n'(t)$. Pero entonces

$$\begin{aligned}
|E_n(z) - 1| &= |E_n(z) - E_n(0)| \\
&= \left| z \int_0^1 E_n'(tz)\,dt \right| \\
&\leqslant -|z|^{n+1} \int_0^1 E_n'(t)\,dt \\
&= -|z|^{n+1}(E_n(1) - E_n(0)) \\
&= |z|^{n+1},
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. ◂

Podemos dar otra demostración de la Proposición 2.1. Dado $n \in \mathbb{N}$, escribamos el desarrollo de Taylor de E_n en torno al origen: digamos que

$$E_n(z) = \sum_{k \geqslant 0} a_k z^k.$$

Como $E_n'(z) = -z^n \exp(z + \cdots + z^n/n)$ tiene todos sus coeficientes de Taylor negativos y un cero de orden n en el origen, resulta que $a_k = 0$ si $k \in \{1, \dots, n\}$ y que $a_k < 0$ si $k > n$. Además, $a_0 = 1$, y $0 = E_n(1) = 1 + \sum_{n>k} a_k$. Todo esto implica que si $|z| \leqslant 1$,

$$|E_n(z) - 1| \leqslant -|z|^{n+1} \sum_{n>k} a_k = |z|^{n+1},$$

como queríamos probar. Sea ahora $\mathfrak{d}$ un divisor positivo en $\mathbb{C}$ no nulo y sea $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión para $\mathfrak{d}$. Podemos asumir, desde luego, que el soporte de $\mathfrak{d}$ es no es finito.

Proposición 2.2. *Si (k_n) es una sucesión en $\mathbb{N}$ tal que $\sum |t/d_n|^{k_n+1} < \infty$ para todo $t > 0$, entonces $z^{\mathfrak{d}(0)} \prod_{n\in\mathbb{N}} E_{k_n}(z/d_n)$ es un producto de Weierstrass para $\mathfrak{d}$. La condición de sumabilidad vale, en particular, si $k_n = n - 1$ para $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Dado $t > 0$, como (d_n) es una sucesión discreta en $\mathbb{C}$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$ y podemos tomar $n_t \in \mathbb{N}$ tal que $|d_n| \geqslant t$ si $n > n_t$. Por la Proposición 2.1, tenemos que

$$\sum_{n>n_t} |E_{k_n}(z/d_n) - 1|_{B_t(0)} \leqslant \sum_{n>n_t} |t/d_n|^{k_n+1} < \infty$$

para cada $t > 0$, que prueba que $z^{\mathfrak{d}(0)} \prod E_{k_n}(z/d_n)$ converge normalmente sobre $\mathbb{C}$. Dado que $E_{k_n}(z/d_n)$ se anula sólo en d_n y lo hace allí con orden 1, este producto es un producto de Weierstrass para $\mathfrak{d}$, como queríamos probar. Para ver que la elección de $k_n = n - 1$ funciona, tomemos dado $t > 0$ un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|d_n| > 2t$ si $n > N$. Entonces $\sum_{n>N} |t/d_n|^{k_n+1}$ queda dominada por $\sum_{n>N} 2^{-n}$, que es finita, y da lo que queremos. ◀

Podemos dar ahora una respuesta afirmativa al Problema 4 y luego, a su vez, al Problema 3, al menos en el caso de $\mathbb{C}$. La prueba que el método de Weierstrass funciona en regiones arbitrarias es más compleja, y el lector puede consultar [15, Capítulo 4]. Consideraremos, sin embargo, el caso en que $\Omega = \mathbb{E}$ más adelante. Como decíamos, queda demostrado que

Teorema 2.3. *Todo divisor en $\mathbb{C}$ es principal.*

Veamos que consecuencias tiene este resultado.

Teorema 2.4 (de factorización de Weierstrass)**.** *Toda función $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ se escribe en la forma $f = e^g h$ donde g es entera y h es un producto de Weierstrass para (f).*

Demostración. Sea h un producto de Weierstrass para (f). La función $H = f/h$ es entera y nunca nula. Como $\mathbb{C}$ es convexo, existe g entera tal que $H = e^g$, y luego $f = e^g h$, como dijimos. ◀

El siguiente resultado implica que $\mathscr{M}(\mathbb{C})$ es el cuerpo de fracciones del dominio íntegro $\mathscr{O}(\mathbb{C})$.

Teorema 2.5. *Toda función meromorfa en $\mathbb{C}$ es el cociente de funciones enteras sin raíces comunes.*

Demostración. Sea $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ y sea $\mathfrak{d} = (f)$. Como dijimos, podemos escribir $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_+ - \mathfrak{d}_-$ donde $\mathfrak{d}_+$ y $\mathfrak{d}_-$ son divisores positivos —el primero tiene soporte en las raíces de f y en los polos de f. Si h es holomorfa y cumple que $(h) = \mathfrak{d}_-$, entonces $g = hf$ es entera. Así $f = g/h$ donde $Z_g = Z_f$ y $Z_h = P_f$ son disjuntos. ◀

Dada una función entera f y $n \in \mathbb{N}$, la función f^n tiene todas sus raíces con multiplicidad n, y la función meromorfa f'/f tiene todos sus polos simples, con residuo entero. Podemos probar, usando el teorema de Weierstrass, que estas dos formas son las más generales que toman las funciones con esta propiedad:

Ejercicio 2.1. Una función entera tiene todas sus raíces de multiplicidad n si, y solamente si, es la potencia n-ésima de una función entera, y una función meromorfa tiene todos sus polos simples y con residuos enteros si, y solamente si, es la derivada logarítmica de una función entera.

2.3. Productos canónicos

El teorema de Weierstrass prueba que dado un divisor positivo $\mathfrak{d}$ podemos encontrar una producto de Weierstrass para $\mathfrak{d}$ eligiendo alguna sucesión $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números naturales de forma apropiada para forzar la convergencia de las sumas infinitas $\sum |r/d_n|^{k_n+1}$ donde $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión para $\mathfrak{d}$. Es natural preguntarse cual es la mejor elección posible de la sucesión $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y, en particular si podemos tomar tal sucesión constante. Continuamos trabajando con un divisor positivo $\mathfrak{d}$.

Proposición 2.6. *Sea $k \in \mathbb{N}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea p_n un polinomio de grado a lo sumo k. Si el producto $f(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{z}{d_n}\right) \exp p_n(z)$ converge normalmente en $\mathbb{C}$ entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} |1/d_n|^{k+1} < \infty$.*

Demostración. La derivada logarítmica $f'/f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left((z - d_n)^{-1} + p'_n(z)\right)$ converge normalmente en $\mathbb{C}$. Si la derivamos k veces, obtenemos que la serie $(-1)^k k! \sum_{n\in\mathbb{N}} (z - d_n)^{-k-1}$ converge normalmente en $\mathbb{C}$ y, en particular, converge absolutamente en $0 \in \mathbb{C}$. ◀

El siguiente resultado se deduce de la proposición anterior y la Proposición VII.1.3.

Corolario 2.7. *Sea $k \in \mathbb{N}$. El producto $z^{\mathfrak{d}(0)} \prod_{n\in\mathbb{N}} E_k(z/d_n)$ es un producto de Weierstrass para $\mathfrak{d}$ si y solamente si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |1/d_n|^{k+1} < \infty$*

Diremos que $z^{\mathfrak{d}(0)} \prod_{n\in\mathbb{N}} E_k(z/d_n)$ es un ***producto de Weierstrass canónico*** para $\mathfrak{d}$ si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |1/d_n|^{k+1} < \infty$ pero $\sum_{n\in\mathbb{N}} |1/d_n|^k = \infty$, es decir, si la elección de k es mínima. Es importante notar que en general la elección de sucesión $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que fuerza la convergencia del producto de Weierstrass para $\mathfrak{d}$ depende de la sucesión (d_n) que elejimos para $\mathfrak{d}$. Sin embargo, en el caso que existan productos canónicos, la elección de sucesión es inmaterial. No es cierto que todo divisor admita productos canónicos: para ver esto, es suficiente con encontrar una sucesión $(r_n) \in \mathbb{R}$ de forma que ninguna serie $\sum r_n^{-k}$ resulte convergente, y eso puede lograrse tomando, por ejemplo, $r_n = \log n$. Notemos que estas raíces se corresponden con la función $\exp(2\pi i \exp z) - 1$, que crece extremadamente rápido.

Diremos que una función entera $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene ***orden estricto a lo sumo*** ρ si $\limsup_{r\to\infty} r^{-\rho} \log M(r) < \infty$. En otras palabras, f tiene orden estricto a lo sumo ρ si $\log M(r) \leqslant K r^\rho$ para r suficientemente grande, donde K es una constante absoluta. El ***orden estricto de*** f es el ínfimo del conjunto $\{t : f \text{ tiene orden estricto} \leqslant t\}$. Notemos que si $n \in \mathbb{N}$ y si p es un polinomio de grado n entonces $\exp p$ tiene orden estricto n, y que cualquier polinomio tiene orden estricto 0.

Veamos ahora que los productos de Weierstrass canónicos se corresponden con las funciones enteras de orden finito.

Teorema 2.8. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Una función entera admite una factorización de Weierstrass $z^{\mathfrak{d}(0)} \prod_{n\in\mathbb{N}} E_k(z/d_n)$ si y solamente si tiene orden estricto a lo sumo k.*

Completar.

3. Funciones elípticas

3.1. La función σ de Weierstrass.

Sean ω y ω' números complejos $\mathbb{R}$-linealmente independientes, y consideremos el conjunto $L(\omega,\omega') = \{n\omega + m\omega' : n, m \in \mathbb{Z}\}$. Decimos que $L(\omega,\omega')$ es un ***retículado en*** $\mathbb{C}$. Este conjunto es evidentemente discreto en $\mathbb{C}$ y define un divisor positivo $\mathfrak{d} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\mathfrak{d}(z) = 1$ si $z \in L(\omega,\omega')$ y tal que $\mathfrak{d}(z) = 0$ si no. Por comodidad notaremos por L a $L(\omega,\omega')$ y por $L*$ a $L \smallsetminus 0$. Afirmamos que

Proposición 3.1. *La función entera $\sigma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$*

$$\sigma(z) = z \prod_{w\in L*} E_2\left(\frac{z}{w}\right)$$

es el producto canónico de Weierstrass para el divisor $\mathfrak{d}$.

Antes de dar la prueba, consideremos con un poco más de cuidado a los reticulados dentro de $\mathbb{C}$. Digamos que un subconjunto $M \subseteq \mathbb{C}$ es un ***reticulado*** si es discreto y cerrado para la suma. Notemos que $\{0\}$ siempre es un reticulado, y que si $\omega \in \mathbb{C}$ es no nulo, entonces $\mathbb{Z}\omega = \{n\omega : n \in \mathbb{Z}\}$ es también un reticulado. Ya observamos que $\mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\omega' = \{n\omega + m\omega' : n, m \in \mathbb{Z}\}$ es también un reticulado. Veamos que estos son todos.

Lema 3.2. *Todo reticulado en $\mathbb{C}$ es o bien el reticulado trivial $\{0\}$ o bien de la forma $\mathbb{Z}\omega$ donde $\omega \neq 0$, o bien de la forma $\mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\omega'$ donde $\omega, \omega' \neq 0$ y el cociente ω/ω' no es real.*

Diremos que un reticulado de la forma $\mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\omega'$ tiene rango 2.

Demostración. Sea M un reticulado en $\mathbb{C}$. Podemos asumir que M no es el reticulado trivial. Dado que M es discreto, existe $r > 0$ tal que $B(0,r) \cap M \smallsetminus 0$ es finito, y podemos elegir $\omega \in M$ no nulo con módulo mínimo —es importante notar que ω puede no ser único. Podría ser el caso que $M = \mathbb{Z}\omega$. De lo contrario, existe $\omega' \in M \smallsetminus \mathbb{Z}\omega$, que es en particular no nulo. Afirmamos que $\lambda = \omega'/\omega$ no es real. De lo contrario, como λ no es entero, existría $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < \lambda < n+1$, que nos da que $0 < |n\omega - \omega'| < |\omega|$, contra nuestra elección de ω. Así ω y ω' son $\mathbb{R}$-linealmente independientes, y todo $z \in \mathbb{C}$ se escribe de forma única como una combinación lineal $\lambda\omega + \lambda'\omega'$ donde $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$.

Veamos, finalmente, que $M = \mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\omega'$, para lo que basta probar que $M \subseteq \mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\omega'$. Dado $z \in M$ existen únicos números reales λ y λ' tal que $z = \lambda\omega + \lambda'\omega'$, y basta ver que estos coeficientes son enteros. Existen m y n enteros tal que $|\lambda - n|, |\lambda' - m| \leqslant 1/2$, y si formamos $z' = z - n\omega - m\omega'$ tenemos que $|z'| < \frac{1}{2}|\omega| + \frac{1}{2}|\omega'| \leqslant |\omega|$, donde la primera desigualdad ese estricta pues ω y ω' son $\mathbb{R}$-linealmente independientes. La minimalidad de $|\omega|$ implica que $z' = 0$ y luego que λ y λ' son, de hecho, enteros. Esto completa la demostración. ◀

Continuamos ahora con el reticulado $L = L(\omega, \omega')$ donde ω y ω' son $\mathbb{R}$-linealmente independientes. Llamamos al par ordenado (ω, ω') una ***base de*** L, y nos preguntamos cual es la relación entre distintas bases de L. Podemos asumir que $\tau = \Im(\omega/\omega') > 0$ — si tal número fuera negativo consideraríamos la base (ω', ω). Si (ρ, ρ') es otra base de L, es decir, si es el caso que ρ y ρ' son $\mathbb{R}$-linealmente independientes y que $L = \mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}\rho'$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \rho &= a_1\omega + a_2\omega' & \qquad \omega &= b_1\rho + b_2\rho' \\ \rho' &= a_1'\omega + a_2'\omega' & \qquad \omega &= b_1'\rho + b_2'\rho' \end{aligned}$$

donde todos los coeficientes son enteros. La unicidad dice que las matrices enteras $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1' & b_2' \end{pmatrix}$ son inversibles y una es la inversa de la otra. Esto dice que A y B tienen ambas determinante 1 o ambas determinante -1. En particular, cambiando (ρ, ρ') por (ρ', ρ) si es necesario, podemos asumir que ambas tienen determinante 1 y pertenecen al ***grupo de matrices enteras unimodulares***

$$\mathsf{SL}(2,\mathbb{Z}) = \{A \in \mathsf{Mat}(2,\mathbb{Z}) : \det A = 1\}.$$

El lector puede verificar que las transformaciones de Möbius representadas por este conjunto fijan la recta real y el semiplano positivo de los $z \in \mathbb{C}$ con $\Im z > 0$. El grupo de tales transformaciones se llama el ***grupo modular***, y estabiliza a todos los reticulados de rango 2 en $\mathbb{C}$.

Notemos por U al conjunto $\{(\omega,\omega') \in \mathbb{C}^2 : \Im(\omega/\omega') > 0\}$ El siguiente resultado es todo lo que necesitamos para probar la Proposición 3.1, y nos da un resultado mucho más fuerte que el que necesitamos: el producto canónico σ converge normalmente en *las tres variables* z, ω y ω'.

Lema 3.3. *Sea $K \subseteq U$ compacto y sea $\lambda > 2$. Existe una constante $M > 0$ que depende de K tal que $\sum_{w\in L*(\omega,\omega')} |w|^{-\lambda} \leqslant M$ para todo $(\omega,\omega') \in K$. Sin embargo, cualquier serie $\sum_{w\in L*(\omega,\omega')} |w|^{-2}$ con $(\omega,\omega') \in K$ diverge.*

Demostración. Consideremos la función continua $F : \mathbb{C}^\times \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(x + iy, \omega, \omega') \longmapsto |x\omega + y\omega'|/\sqrt{x^2 + y^2}$. Notemos que $F(\lambda z, \omega, \omega') = F(z, \omega, \omega')$ si $\lambda \in \mathbb{R}$, así $F(\mathbb{C}^\times \times U) = F(S^1 \times U)$. Por continuidad dado un compacto K, $F(S^1 \times K) \subseteq [m_*, m^*]$ donde $m_* > 0$, pues F es nunca nula. Podemos entonces reducir la convergencia de las sumas $\sum_{w\in L*(\omega,\omega')} |w|^{-\lambda}$ a la de las sumas $\sum_{0\neq m,n\in Z} (m^2 + n^2)^{-\lambda/2}$. En tal caso, basta que notemos, por un lado, que $m^2 + n^2 > mn$ si $m, n > 0$ y luego la afirmación se deduce de esta estimación, de la igualdad

$$\sum_{0\neq m,n\in Z} (m^2+n^2)^{-\lambda/2} = 4 \sum_{0<m,n\in Z} (m^2+n^2)^{-\lambda/2} + 4 \sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-\lambda}$$

y la convergencia de las series $\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-\lambda}$ y $\sum_{m\in\mathbb{N}} m^{-\lambda/2}$. Para ver que la serie diverge si $\lambda = 2$, notemos que

$$\sum_{m,n>0} (m^2+n^2)^{-1} \geqslant \sum_{m,n>0} n^{-2} = \infty.$$

De todo esto se deduce, en particular, la Proposición 3.1. ◂

3.2. Las funciones ζ y $\wp$ de Weierstrass.

Dado que el producto infinito σ converge normalmente en $\mathbb{C}$, podemos considerar su derivada logarítmica ζ, que tiene una representación en serie

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{w\in L^*}\left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right)$$

y define una función meromorfa en $\mathbb{C}\times U$ con polos simples en cada punto de L. Llamamos a esta función la ***función ζ de Eisenstein–Weierstrass***. Tomando su derivada usual obtenemos la ***función $\wp$ de Weierstrass***

$$\wp(z) = -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w\in L^*}\left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right)$$

que es meromorfa y tiene polos dobles en cada punto de L^*, y en ningún otro punto. La función $\wp$ pertenece a una clase muy importante de funciones meromofas, conocidas como *funciones elípticas*. Una función meromorfa $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene a $\omega \in \mathbb{C}$ como período si $f(z+\omega) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Esta claro que el conjunto de períodos de una funcion meromofa f no constante es un reticulado L_f en $\mathbb{C}$. En el caso que L_f sea de rango 2, diremos que f es una función elíptica. Ya vimos que toda función elíptica que es entera debe ser constante, así pues asumimos que f tiene al menos un polo —naturalmente, el hecho que f admite períodos implica que f tiene infinitos polos.

Como L_f tiene rango 2, existen $\omega, \omega' \in \mathbb{C}$ no nulos con $\Im(\omega/\omega') > 0$ tal que $L_f = L(\omega,\omega')$. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, notemos por P_λ al paralelogramo obtenido al trasladar el paralelogramo con lados ω y ω' por λ, y lo llamamos un ***paralelogramo fundamental***; los valores de f están completamente determinados por los valores que toma en alguno de estos paralelogramos. Está claro que podemos tomar $\lambda \in \mathbb{C}$ de forma que f no tenga ningún polo sobre P_λ. Existen finitos polos dentro de P_λ, y este número no depende de λ.

Teorema 3.4. *Sea P un paralelogramo fundamental y supongamos que f no tiene* *polos en el borde de P. Entonces*

$$\sum_{w\in P}\operatorname{Res}\big(f,w\big)=0.$$

El ***orden de*** f es el número de sus polos y raíces contadas con multiplicidad. Del teorema anterior deducimos que toda función elíptica no constante tiene orden por lo menos 2.

Demostración. Sabemos que $\sum_{w\in P}\operatorname{Res}\big(f,w\big)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P} f\,dz$. Por otro lado, la integral es nula, ya que las integrales sobre lados opuestos de P se cancelan en virtud de la periodicidad de f. ◀

Podemos también relacionar las raíces y los polos de una función elíptica usando nuevamente el Teorema de los Residuos.

Teorema 3.5. *Sea P un paralelogramo fundamental y supongamos que f no tiene polos ni raíces en el borde de P. Si Θ es el conjunto de polos y raíces en P, entonces*

$$\sum_{z\in\Theta} o_f(z)=0 \text{ y } \sum_{z\in\Theta} o_f(z)z\in L.$$

Demostración. La derivada f' también es elíptica, y luego lo es f'/f. Podemos usar ahora el teorema anterior para concluir que la integral de f'/f sobre ∂P es nula. Esto prueba que $Z_f(\partial P)=P_f(\partial P)$, como dijimos. Para probar la segunda parte, recordemos que

$$\sum_{z\in\Theta} o_f(z)z=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P} zf'(z)/f(z)\,dz,$$

y basta ver que esta integral está en L. Para esto, notemos que las integrales sobre los lados opuestos son

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda}^{\lambda+\omega'}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda+\omega}^{\lambda+\omega+\omega'}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz=-\frac{\omega'}{2\pi i}\int_{\lambda}^{\lambda+\omega'}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz,$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda}^{\lambda+\omega}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda+\omega'}^{\lambda+\omega+\omega'}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz=-\frac{\omega}{2\pi i}\int_{\lambda}^{\lambda+\omega}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Para terminar, observamos que las dos últimas integrales son enteros: la primera es el número de giros del lazo $t\in[0,1]\longmapsto f(\lambda+t\omega)$ en torno al origen, y la segunda es el número de giros del lazo $t\in[0,1]\longmapsto f(\lambda+t\omega')$ en torno al origen. ◂

Probemos ahora, como afirmamos, que $\wp$ es una función elíptica. Notemos que $\wp$ es una función par, y que su derivada es

$$\wp'(z)=-2\sum_{w\in L}\frac{1}{(z-w)^3}.$$

Es evidente que $\wp'$ es elíptica y que $L(\omega,\omega')$ es su reticulado de períodos. Ademas $\wp'$ es impar y, dado que es ω-periódica, existe una constante c tal que $\wp(z+\omega)-\wp(z)=c$. Como $\wp$ es par, si elejimos $z=-\omega/2$ obtenemos que $c=0$. Análogamente, ω' es un período de $\wp$, y luego $\wp$ tiene a $L=L(\omega,\omega')$ como su reticulado de períodos: cualquier otro período fuera de L introduciría polos fuera de L, y estos son todos los polos de $\wp$, como queda claro de su expresión como serie.

A cada reticulado L de rango 2 podemos asociarle un cuerpo, el cuerpo de funciones elípticas con conjunto de períodos L, que notamos por $\mathscr{M}_L$. Por otro lado, el conjunto $\mathbb{C}(\wp,\wp')$ de todas las funciones racionales en $\wp$ y $\wp'$ es también un cuerpo de funciones elípticas. Veamos que coincide con $\mathscr{M}_L$.

Teorema 3.6. *Toda función elíptica con reticulado de períodos igual a L es una función racional de $\wp$ y $\wp'$.*

Demostración. Sea $f\in\mathscr{M}_L$. Dado que podemos escribri a f como una suma de una función elíptica par y una impar, y dado que si $g\in\mathscr{M}_L$ es impar entonces $\wp' g$ es par, es suficiente que consideremos el caso que f es par. La idea será ver que podemos encontrar una función racional $g=R(\wp,\wp')$ que tenga las mismas raíces y los mismos polos que f dentro de un rectángulo fundamental que contiene al origen, y luego usar el teorema de Liouville para concluir que $f=\lambda R(\wp,\wp')$.

Si f es par y tiene un cero o un polo en algún $u\in\mathbb{C}$, entonces f tiene un cero o un polo, respectivamente, del mismo orden, en $-u$. Afirmamos ahora que si $2u \in L$, entonces f necesariamente tiene un cero o un polo de orden par en u. Como f' es impar si f es par, obtenemos que $f'(u) = -f'(-u) = -f'(u)$ y luego que $f'(u) = 0$. Así f tiene un cero de orden al menos 2 en u. Además de que $2u \in L$, distinguimos dos casos. Si $u \notin L$ entonces el argumento anterior prueba que $g = \wp - \wp(u)$ tiene un cero de orden al menos dos, y de hecho exactamente dos pues $\wp$ tiene exactamente un polo de orden dos en cada paralelogramo fundamental. El cociente f/g es holomorfo en u, elíptico y otra vez par. Si no se anula en u,entonces f tiene una raíz de orden 2 en u. De lo contrario, podemos continuar el argumento. En el caso que $u \in L$, la función $g = 1/\wp$ tiene un cero de orden 2 en u, y podemos hacer el mismo argumento. Si f tiene un polo, consideramos $1/f$ y usamos el argumento anterior.

Lo anterior prueba que si $w \notin L$ entonces la función $\wp_w(z) = \wp - \wp(w)$ tiene un cero de orden 2 en w si y solamente si $2w \in L$ y tiene ceros de orden 1 en w y $-w$ si $2w \notin L$. Tomamos ahora un conjunto $u_1, \ldots, u_r$ de raíces y polos en un paralelogramo fundamental P que contiene al origen y contiene un representante de cada clase $(u, -u)$ en L. Definimos ahora $m_i = o_f(u_i)$ si $2u_i \notin L$ y $m_i = \frac{1}{2} o_f(u_i)$ si $2u_i \in L$. Para todo $z \notin L$, la función $g = \wp_{u_1}^{m_1} \cdots \wp_{u_r}^{m_r}$ tiene el mismo orden en z que f. Dado que la suma de los órdenes en los puntos de P de f y g suman 0, deducimos que f y g tienen también el mismo órden en el origen, y luego en cada punto de L. Esto implica, como queríamos, que f/g es elíptica y no tiene polos ni raíces, y luego es constante. ◀

3.3. La ecuación diferencial y la función modular

Completar.

4. El teorema de Mittag–Leffler

Completar.

5. Productos de Blaschke

Completar.

6. Teoría de Runge

Sabemos que toda función holomorfa sobre un disco B es el límite en $\mathcal{O}(B)$ de una sucesión polinomios. Sabemos también que toda función holomorfa sobre un anillo A es el límite en $\mathcal{O}(A)$ de una sucesión de funciones racionales: este es el teorema de representación de Laurent. Esto indica, al menos informalmente, que la presencia de un "agujero" en A fuerza que introduzcamos términos que no son polinomios —aunque si, después de todo, funciones racionales con polos en este agujero— para aproximar funciones holomorfas, y que esto a veces es necesario: la función holomorfa $z \longmapsto z^{-1}$ en $\mathbb{C}^\times$ no es el límite de polinomios sobre $\mathbb{C}$, pues tiene integral nula sobre el círculo unidad, y cualquier polinomio tiene integral cero sobre cualquier lazo en $\mathbb{C}$.

El objetivo de esta sección es probar que este fenómeno es completamente general: un ***agujero*** de un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es una componente acotada del complemento $\mathbb{C} \smallsetminus \Omega$. Dado un compacto $K \subseteq \mathbb{C}$, veremos que si P es un conjunto de puntos, uno en cada agujero de $\mathbb{C} \smallsetminus K$, toda función holomorfa (en un entorno abierto de) K puede aproximarse por funciones racionales con polos en P. En particular, veremos que si K no tiene agujeros, toda funcion holomorfa sobre K es el límite en $\mathcal{O}(K)$ de polinomios. Usando esto...

Completar.

6.1. La fórmula de Cauchy para compactos.

Sea Ω una región en $\mathbb{C}$. Un ***ciclo en*** Ω es una suma formal $\Gamma = n_1\gamma_1 + \cdots + n_r\gamma_r$ donde γ_i es un lazo en Ω y n_i es un entero para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. La traza de Γ es la unión de las trazas de sus términos, y el índice de Γ respecto a un punto fuera de su traza es la suma de los índices de sus términos respecto a este punto, es decir, para cada $z \notin \Gamma$, ponemos $\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = \operatorname{Ind}(\gamma_1, z) + \cdots \operatorname{Ind}(\gamma_r, z)$.

Lema 6.1. *Sea $K \subseteq \Omega$ compacto no vacío. Para cada $c \in \Omega \smallsetminus K$ existen ciclos Γ_1 y Γ_2 en $\Omega \smallsetminus K$ que no pasan por c tal que*

- *Γ_1 gira una vez en torno a $K \cup \{c\}$ y cero veces en torno a $\mathbb{C} \smallsetminus \Omega$ y,*
- *Γ_2 gira una vez en torno a K y cero veces en torno a $(\mathbb{C} \smallsetminus \Omega) \cup \{c\}$.*

Decimos que los ciclos Γ_1 y Γ_2 ***separan a*** c ***de*** Ω ***y*** K. La demostración sigue la del Lema 3.4.5 en [3].

Demostración. Consideremos una teselación de $\mathbb{C}$ por hexágonos de lado suficientemente pequeño tal que

(1) c está contenido en el interior de un haxágono $h_c \subseteq \Omega \smallsetminus K$ y,

(2) todo h hexágono que corta K está enteramente contenido en Ω.

Notemos por $\mathscr{H}$ a la familia finita de hexágonos que cortan a K, y sea $\mathscr{S}$ el conjunto de lados de hexágonos de $\mathscr{H}$ que pertenecen a exactamente un elemento de ese conjunto. Afirmamos que podemos disponer a tales lados en una cadena Γ_2 como en el enunciado. Orientamos a los bordes de los hexágonos de nuestra teselación de forma anti-horaria. Si $s \in \mathscr{S}$ es un segmento, veamos que existe un único segmento $s^+ \in \mathscr{S}$ tal que s^+ comienza donde s termina. Dado que $s \in \mathscr{S}$, s pertenece a un único hexágono h que corta a K. En particular, el hexágono h_s que corta a h en s no corta a K. Si el sucesor de s en h corta a K entonces no está en $\mathscr{S}$, y en tal caso s^+ es el predecesor de s en h_s. Si, por otro lado, el sucesor de s en h no corta a K entonces este segmento es s^+.

Usando lo anterior, podemos elegir un $s \in \mathscr{S}$ y considerar la sucesión $s_0 = s$, $s_{i+1} = s_i^+$ para $i \in \mathbb{N}_0$. Dado que $\mathscr{S}$ es finito, existe un primer $n \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n+1} = s$, y obtenemos un lazo poligonal $\gamma_1 = s_0 s_1 \cdots s_n s_0$. Repitiendo esto sobre el conjunto $\mathscr{S} \smallsetminus \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$, obtenemos otro lazo poligonal γ_2, y eventualmente usando todos los segmentos en $\mathscr{S}$ y obteniendo un ciclo $\Gamma_2 = \gamma_1 + \cdots + \gamma_r$. Como Ω es conexo, podemos ahora modificar Γ_2 usando un hexágono a la vez hasta obtener un ciclo Γ_1 que contenga a c en su interior, siguiendo algún camino poligonal simple de algún punto en Γ_1 hasta c, y luego cubriéndolo con hexágonos. Veamos que Γ_1 y Γ_2 tienen las propiedades deseadas.

Si $\Gamma = h_1 + \cdots + h_t$ es el ciclo obtenido al sumar todos los hexágonos de $\mathscr{H}$, entonces $\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = \operatorname{Ind}(\Gamma_1, z) = 1$ para todo z que es interior a algún $h \in \mathscr{H}$, pues la contribución de los lados comunes a dos hexágonos es nula. Un argumento de continuidad prueba que esto también es cierto si z está sobre algún lado común, pues podemos omitir el lado común de Γ y aproximarnos a z por puntos internos. Deducimos, en particular, que Γ_1 gira una vez en torno a K. Análogamente, si $z \notin \Omega$ entonces $\operatorname{Ind}(\Gamma, z) = \operatorname{Ind}(\Gamma_1, z) = 0$ y luego Γ_1 no gira en torno a $\mathbb{C} \smallsetminus \Omega$.

El argumento para Γ_2 es análogo: Γ_2 se obtiene se Γ_1 sumándole un lazo poligonal contráctil en Ω que gira una vez en torno a c, y no modifica el índice de Γ_1 en torno a K y en torno a $\mathbb{C} \smallsetminus \Omega$. ◄

El ciclo Γ_1 hace las veces del borde de un disco que encierra a K, y nos da una fórmula de Cauchy sobre conjuntos compactos. Si $\Gamma = \sum n_i \gamma_i$ es un ciclo sobre Ω y si $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, definimos la integral de f sobre Γ extendiendo nuestra definición usual de la forma evidente:

$$\int_\Gamma f\,dz = \sum n_i \int_{\gamma_i} f\,dz.$$

Teorema 6.2. *Si f es holomorfa en $\mathscr{O}(\Omega)$, entonces para cada $z \in K$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Demostración. Es suficiente que imitemos el argumento que hicimos para probar que Γ_1 gira una vez en torno a K, esta vez usando la fórmula de Cauchy en los hexágonos de nuestra teselación. Invitamos al lector a dar los detalles de la demostración. ◄

6.2. Aproximación e intercambio de polos

La siguiente serie de lemas dan las herramientas necesarias para probar los resultados prometidos al principio de esta sección. En todo lo que sigue K es un compacto no vacío en $\mathbb{C}$ y $\Omega \supseteq K$ es una región.

Lema 6.3. *Sea σ un segmento recto disjunto de K y sea $h : |\sigma| \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. La función*

$$f : z \in \mathbb{C} \smallsetminus |\sigma| \longmapsto \int_\sigma \frac{h(\xi)}{\xi - z} d\xi \in \mathbb{C}$$

puede aproximarse uniformemente sobre K por funciones racionales con polos simples sobre σ.

Demostración. La función $g : (\xi, z) \in |\sigma| \times K \longmapsto h(\xi)(\xi - z)^{-1} \in \mathbb{C}$ es uniformemente continua, así dado $\varepsilon > 0$ podemos subdividir σ en segmentos $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$ de forma que si $\xi, \xi' \in \sigma_i$ y si $z \in K$, $|g(\xi, z) - g(\xi', z)| \leqslant \varepsilon$. Para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$ tomemos puntos $w_i \in \sigma_i$ y definamos $c_i = h(w_i) \int_{\sigma_i} d\xi$. La estimación estándar asegura que para cada $i \in \{1, \ldots, t\}$ tenemos que

$$\left| \int_{\sigma_i} g(\xi, z) d\xi - \frac{c_i}{z - w_i} \right| = \left| \int_{\sigma_i} (g(\xi, z) - g(w_i, z)) d\xi \right| \leqslant \varepsilon L(\sigma_i).$$

Si $q(z) = \sum_{i=1}^r c_i (z - w_i)^{-1}$, obtenemos que $|f - q|_K \leqslant L(\sigma)\varepsilon$, como queríamos probar. ◂

De la forma en que probamos la fórmula de Cauchy para compactos y de este lema deducimos el siguiente

Lema 6.4 (de aproximación)**.** *Toda función en $\mathcal{O}(\Omega)$ puede aproximarse uniformemente sobre K por funciones racionales con polos simples fuera de K.*

Notemos que en la demostración del Lema 6.3, y luego en el lema anterior, el número de polos que necesitamos para aproximar a una función holomorfa aumenta a medida que buscamos mejores aproximaciones. El siguiente lema afirma, esencialmente, que podemos usar solo un polo por cada componente conexa de $\mathbb{C} \smallsetminus K$ para lograr esta aproximación.

Lema 6.5 (de intercambio de polos)**.** *Sea C una componente de $\mathbb{C} \smallsetminus K$ y sean $c, c' \in C$. Entonces $(z - c)^{-1}$ puede aproximarse uniformemente sobre K por polinomios en $(z - c')^{-1}$. En particular, si C es la componente no acotada de $\mathbb{C} \smallsetminus K$, $(z - c)^{-1}$ puede aproximarse uniformemente por polinomios.*

Demostración. Para cada $w \notin K$ sea $L(w)$ el conjunto de funciones en $\mathscr{O}(K)$ que pueden ser aproximadas uniformemente por polinomios en $(z-w)^{-1}$. Esta claro que si $(z-\lambda)^{-1} \in L(\mu)$ y si $(z-\mu)^{-1} \in L(\rho)$ entonces $(z-\lambda)^{-1} \in L(\rho)$. Primera afirmación del teorema es que $C = \{w \in C : (z-w)^{-1} \in L(c')\} =: D$.

Ciertamente D es no vacío, pues $c' \in D$. Afirmamos que si $w \in D$ y si B es un disco en C con centro en w, entonces B está contenido en D. Dado que C es abierto, esto prueba que $C = D$. Para ver que tal afirmación es cierta, tomemos $w' \in B$. Podemos escribir a $(z-w')^{-1}$ como una serie geométrica $\sum (w'-w)^n (z-w)^{-n-1}$ que converge normalmente en $\mathbb{C} \smallsetminus B$, y luego lo hace uniformemente en K. Esto implica que $(z-w')^{-1} \in L(w)$. Como $(z-w)^{-1} \in L(c')$, resulta que $w' \in D$, como queríamos ver.

Para terminar, notemos que si C es no acotada existe $u \in C$ tal que $K \subseteq B(0,|u|)$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $(z-u)^{-n}$ puede aproximarse en $B(0,|u|)$ por sus polinomios de Taylor en torno al origen, y luego uniformemente en K por tales polinomios. Por lo que ya probamos, si $c \in C$ entonces $(z-c)^{-1}$ puede aproximarse también por polinomios, como queríamos. ◀

Notemos que en el caso de aproximación por polinomios, el lema dice que podemos intercambiar un polo finito en la componente no acotada por el polo en infinito.

6.3. Los teoremas de Runge

Dado un subconjunto arbitrario $P \subseteq \mathbb{C}$, sea $\mathbb{C}[z;P]$ la $\mathbb{C}$-álgebra de funciones racionales sobre $\mathbb{C}$ cuyos polos estan contenidos en P.

Teorema 6.6. *Si $P \subseteq \mathbb{C} \smallsetminus K$ corta a cada agujero de K, toda función en $\mathscr{O}(K)$ puede aproximarse uniformemente por funciones en $\mathbb{C}[z;P]$.*

Demostración. Sea $f \in \mathscr{O}(K)$ y $\varepsilon > 0$. Como f es holomorfa en algún entorno abierto de K, sabemos que existe una función racional de la forma $q(z) = \sum_{i=1}^{r} c_i (z-w_i)^{-1}$ donde $w_i \in \mathbb{C} \smallsetminus K$ tal que $|f-q|_K \leqslant \varepsilon$. Si w_i está en un agujero de K, existe por hipótesis un $z_i \in P$ en este mismo agujero, y el lema de intercambio de polos dice que podemos aproximar a $(z-w_i)^{-1}$ uniformemente por polinomios en

$(z - z_i)^{-1}$. Si por otro lado w_i esta en la componente no acotada, podemos aproximar a $(z - w_i)^{-1}$ uniformemente por polinomios. Esto implica, ciertamente, que existe $g \in \mathbb{C}[z; P]$ tal que $|f - g|_K \leqslant 2\varepsilon$, y prueba el teorema. ◀

De inmediato deducimos el

Teorema 6.7. *Si K es compacto y está contenido en Ω, y si ningún agujero de K está contenido en Ω, toda función en $\mathscr{O}(K)$ puede aproximarse uniformemente sobre K por funciones racionales que son holomorfas sobre Ω. En particular, si K no tiene agujeros, toda función en $\mathscr{O}(K)$ puede aproximarse uniformemente sobre K por polinomios.*

Demostración. En efecto, en este caso podemos elejir al conjunto P de polos para que no corte a Ω. Si K no tiene agujeros la demostración del teorema anterior prueba que podemos tomar solo polinomios en la aproximación uniforme a una $f \in \mathscr{O}(K)$. ◀

Completar.

Bibliografía

[1] Lars V. Ahlfors, *Complex analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable; International Series in Pure and Applied Mathematics. MR510197

[2] Tom M. Apostol, *Mathematical analysis: a modern approach to advanced calculus*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1957. MR0087718

[3] Robert B. Ash and W. P. Novinger, *Complex Variables*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2007.

[4] Henri Cartan, *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*, Adiwes International Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1963.

[5] John B. Conway, *Functions of one complex variable*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 11, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978. MR503901

[6] John D. Dixon, *A brief proof of Cauchy's integral theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **29** (1971), 625–626, DOI 10.2307/2038614. MR0277699

[7] Ira M. Gessel, *Lagrange inversion*, J. Combin. Theory Ser. A **144** (2016), 212–249, DOI 10.1016/j.jcta.2016.06.018. MR3534068

[8] Einar Hille, *Analytic function theory. Vol. 1*, Introduction to Higher Mathematics, Ginn and Company, Boston, 1959. MR0107692

[9] John Roe, *Winding around*, Student Mathematical Library, vol. 76, American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2015. The winding number in topology, geometry, and analysis. MR3379904

[10] Serge Lang, *Complex analysis*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 103, Springer-Verlag, New York, 1993. MR1199813

[11] A. N. Kolmogorov and A. P. Yushkevich (eds.), *Mathematics of the 19th century*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1998. Function theory according to Chebyshev, ordinary differential equations, calculus of variations, theory of finite differences; Translated from the 1987 Russian original by Roger Cooke. MR1634232

[12] M. B. Porter, *Concerning series of analytic functions*, Ann. of Math. (2) **6** (1905), no. 4, 190–192, DOI 10.2307/2007247. MR1503557

[13] G. Pólya and G. Szegő, *Problems and theorems in analysis. Vol. I: Series, integral calculus, theory of functions*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972. Translated from the German by D. Aeppli; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 193. MR0344042

[14] Reinhold Remmert, *Theory of complex functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 122, Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the second German edition by Robert B. Burckel; Readings in Mathematics. MR1084167

[15] ______, *Classical topics in complex function theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 172, Springer-Verlag, New York, 1998. Translated from the German by Leslie Kay. MR1483074

[16] Michael Spivak, *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965. MR0209411

[17] Xavier Tolsa, *Painleve's problem and the semiadditivity of analytic capacity*, ArXiv Mathematics e-prints (2002), available at `math/0204027`. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.

[18] G. Vitali, *Sulle serie di funzioni analitiche*, Rend. Ist. Lombardo **2** (1903), 771–774.

[19] Caspar Wessel, *On the Analytical Representation of Direction*, Matematisk-fysiske meddelelser, Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, 1999, 1797. An Attempt Applied Chiefly to Solving Plane and Spherical Polygons.

[20] Malik Younsi, *On removable sets for holomorphic functions*, EMS Surv. Math. Sci. **2** (2015), no. 2, 219–254, DOI 10.4171/EMSS/12. MR3429163