Nombre y Apellido:

1	2	3	4	5

Segundo Parcial - Topología 2023

1. La botella de Klein K se define como el cociente de $[-2,2] \times [-2,2]$ con la topología usual por la relación de equivalencia generada por

   $$(x,-2) \sim (-x,2) \text{ para todo } x \text{ en } [-2,2] \text{ y } (-2,y) \sim (2,y) \text{ para todo } y \text{ en } [-2,2].$$

   Probar que el complemento de $\{[(-1,0)],[(1,0)]\}$ en la botella de Klein es homotópicamente equivalente al subespacio

   $$\{(x,y) : |(x,y)-(-2,0)| = 1\} \cup \{(x,y) : |(x,y)-(0,0)| = 1\} \cup \{(x,y) : |(x,y)-(2,0)| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

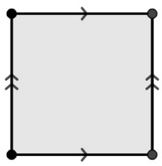
2. Sea $f : S^1 \to S^1$ una función continua que es homotópica a $g(z) = z^7$. Probar que la preimagen de cada punto tiene cardinal al menos 7.

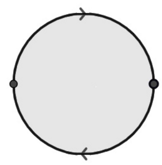
3. Sea $p : E \to B$ un revestimiento, probar que

   a) si E es un espacio T_1 entonces B también lo es,

   b) si E es un espacio Hausdorff y compacto entonces B también lo es.

4. Consideremos el toro $S^1 \times S^1$ y el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ como los cocientes usuales de las siguientes figuras:

   Calcular el grupo fundamental del pegado del toro y el plano proyectivo identificando sus subespacios homeomorfos a S^1 que se corresponden con el lado de arriba del cuadrado y la semicircunferencia de arriba en el círculo.

5. Probar que si un subespacio S de $\mathbb{R}^n$ es unión de finitos abiertos convexos de forma que cualesquiera cuatro de ellos tengan un punto en común entonces $H_2(S) = H_1(S) = 0$.