Nombre y Apellido:

1	2	3	4	5

Recuperatorio Primer Parcial - Topología 2023

1. El toro T se define como el cociente de $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ con la topología usual por la relación de equivalencia generada por

$$(x, 0) \sim (x, 2\pi) \text{ para todo } x \text{ en } [0, 2\pi] \text{ y } (0, y) \sim (2\pi, y) \text{ para todo } y \text{ en } [0, 2\pi].$$

   Probar que

   a) el toro T es un espacio Hausdorff y compacto,

   b) la función cociente $p : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to T$ es cerrada pero no es abierta.

2. Probar que un espacio es localmente conexo si y sólo si todo subespacio abierto tiene la propiedad de que todas sus componentes conexas son abiertas.

3. Dado un espacio X probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

   a) si A y B son tales que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$ entonces se pueden separar por abiertos,

   b) todo subespacio es normal,

   c) todo subespacio abierto es normal.

4. Sea X un espacio Hausdorff compacto. Probar que para toda $f : X \to X$ continua, si definimos

$$S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(X)$$

   entonces S es un subespacio no vacio que es cerrado y verifica que $f(S) = S$.

5. Sea $p : X \to Y$ una función cociente, probar que

   a) si S es un subespacio cerrado de Y entonces $p_S : f^{-1}(S) \to S$ es cociente,

   b) si $q : Y' \to Y$ es continua con Y' un espacio Hausdorff localmente compacto y Y un espacio Hausdorff entonces el cambio de base $p' : X' \to Y'$ es una función cociente.

   Sugerencia: Para la segunda parte factorizar q por su gráfico.