PRÁCTICA 7: REVESTIMIENTOS Y CÁLCULO DE GRUPOS FUNDAMENTALES

1. Probar que las fibras de un revestimiento son discretas y que si la base del revestimiento es un espacio conexo entonces todas las fibras tienen el mismo cardinal.

2. Probar que un revestimiento es un homeomorfismo local sobreyectivo y en particular cociente y dar un ejemplo de un homeomorfismo local sobreyectivo que no sea un revestimiento.

3. Sea $p : E \to B$ un revestimiento con B conexo y localmente conexo, probar que la restricción del revestimiento a toda componente conexa de E es un revestimiento.

4. Dar $p : X \to Y$ y $q : Y \to Z$ que sean revestimientos pero que su composición no lo sea y probar que en general si la función q tiene fibras finitas entonces $q \circ p$ es revestimiento.

5. Probar que ser revestimiento es estable por productos finitos y cambio de base.

6. Probar que las siguientes funciones son revestimientos:

   a) $p : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $p(x) = e^{2\pi i x}$,

   b) $p : S^1 \to S^1$ dada por $p(z) = z^n$,

   c) $p : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ dada por la proyección al espacio proyectivo,

   d) $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \to \{1\} \times S^1 \cup S^1 \times \{1\}$ dada por $p(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$,

   e) $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ dada por $p(z) = e^z$.

7. Calcular el grupo fundamental de los siguientes espacios ya sea probando que son simplemente conexos o usando un revestimiento simplemente conexo:

   a) las esferas S^n,

   b) los espacios proyectivos $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$,

   c) el cilindro $S^1 \times [0, 1]$.

8. Calcular el grupo fundamental del toro $S^1 \times S^1$ y el morfismo que induce en los grupos fundamentales la función

   $$f : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1 \text{ dada por } f(z_1, z_2) = (z_1^2 \cdot z_2^3, z_1^4 \cdot z_2^5)$$

   y usar esto para ver que la función en cuestión no es una equivalencia homotópica.

9. Sea M la banda de Möbius, probar que la función cociente usual $p : [0, 1] \times \mathbb{R} \to M$ es un revestimiento simplemente conexo y usar esto para calcular su grupo fundamental y demostrar que no existe ninguna retracción continua de la banda de Möbius a su borde.

10. Sea K la botella de Klein, probar que la función cociente usual $p : S^1 \times \mathbb{R} \to K$ es un revestimiento que indude una sucesión exacta de grupos

    $$1 \to \pi_1(S^1 \times \mathbb{R}, (1, 0)) \to \pi_1(K, p(1, 0)) \to \mathbb{Z} \to 1,$$

    y usar esto para dar una presentación de su grupo fundamental y demostrar que no existe ningún espacio X tal que $X \times X$ sea homeomorfo a la botella de Klein.

11. Sea $p : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ el revestimiento dado por $p(z) = z^3$. Calcular todos los posibles levantados de los siguientes caminos

$$f(t) = 2 - t,\ g(t) = (1+t) \cdot e^{2\pi i t} \text{ y } \ f(t) * g(t)$$

y usar esto para demostrar que el revestimiento no admite ninguna sección que sea continua.

12. Sean $a, b : [0,1] \to \mathbb{C}$ continuas tales que $4a(t)^3 + 27b(t)^2 \neq 0$ para todo t, probar que existen exactamente tres funciones continuas

$$f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ tales que } f(t)^3 + a(t)f(t) + b(t) = 0 \text{ para todo } t \text{ en } [0,1]$$

y generalizar para curvas de polinomios mónicos de un grado fijo que no tengan raices dobles.

13. Probar que $f : X \to S^1$ es homotópicamente nula si y sólo si se levanta a $p : \mathbb{R} \to S^1$.

14. Decidir si cada uno de los siguientes espacios admite una función a S^1 que sea continua pero no sea homotópicamente nula:

    a) la esfera S^2,
    b) el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$,
    c) la banda de Möbius M,
    d) el toro $S^1 \times S^1$.

15. Sea $f : S^1 \to S^1$ continua, probar que existe un número entero n tal que la función es homotópica a una de la forma $z \mapsto z^n$ y que en ese caso tiene al menos $|n-1|$ puntos fijos.

16. Probar que toda función continua de un retracto de D^2 en sí mismo tiene un punto fijo.

17. Probar que si S^2 se cubre por tres abiertos luego uno de ellos contiene dos puntos antipodales.

18. Sea G un grupo topológico y X un espacio topológico que es un G-espacio. La acción se dice que es *libre* si

$$\text{si para todo } x \text{ se tiene que } gx \neq x \text{ para todo } g \neq e$$

y que es *propiamente discontinua* si

$$\text{si todo para todo } x \text{ existe entorno abierto } U \text{ tal que } gU \cap U = \varnothing \text{ para todo } g \neq e,$$

probar que

    a) si X es Hausdorff, G es finito y la acción es libre entonces es propiamente discontinua.
    b) si la acción es propiamente discontinua, entonces $p : X \to X/G$ es un revestimiento.
    c) si X simplemente conexo y la acción es propiamente discontinua entonces $\pi_1(X) = G$.

19. Dado un grupo topológico G demostrar que para todo subgrupo discreto H, la proyección al cociente $p : G \to G/H$ es un revestimiento que induce una sucesión exacta

$$1 \to \pi_1(G, e) \to \pi_1(G/H, p(e)) \to H \to 1$$

y deducir que si G es simplemente conexo, el grupo fundamental de G/H es isomorfo a H.

20. Probar que $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ es arco-conexo y su grupo fundamental no es numerablemente generado.