PRÁCTICA 6: HOMOTOPÍA Y GRUPO FUNDAMENTAL

1. Probar que cualesquiera dos rotaciones en S^1 son homotópicas.
2. Probar que toda $f : X \to S^2$ continua que no es sobreyectiva es homotópicamente nula.
3. Probar que toda $f : X \to U$ continua con X compacto y U un abierto de $\mathbb{R}^n$ tiene un entorno en la topología compacto-abierta en donde todas las funciones son homotópicas a f.
4. Probar que la composición de dos funciones es homotópica a la composición de cualesquiera dos funciones que son respectivamente homotópicas a las funciones originales.
5. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Para cada espacio topológico Z definimos las siguientes funciones
$$f^* : [Y, Z] \to [X, Z] \text{ y } f_* : [Z, X] \to [Z, Y]$$
dadas por
$$f^*([\phi]) = [\phi \circ f] \text{ y } f_*([\phi]) = [f \circ \phi].$$
Probar que
    a) la función f^* está bien definida y si f y g son homotopicas entonces $f^* = g^*$.
    b) la función f_* está bien definida y si f y g son homotopicas entonces $f_* = g_*$.
    c) Deducir que si f es equivalencia homotópica entonces f^* y f_* son biyecciones.
6. Sea $f : X \to Y$ una función continua, probar las siguientes afirmaciones
    a) existe un tal función f que admite inversa homotópica a izquierda pero no a derecha,
    b) si existen g y h con $fg \simeq \mathrm{Id}_Y$ y $hf \simeq \mathrm{Id}_X$ entonces f es equivalencia homotópica
    c) si existen g y h con fg y hf equivalencias homotópicas entonces f también lo es
    d) si $f \simeq f'$ entonces f es equivalencia homotópica si y sólo si f' lo es.
7. Probar que una equivalencia homotópica entre dos espacios induce una biyección entre las componentes conexas y también entre las componentes arco-conexas. En particular, deducir que un espacio es conexo o arco-conexo si y sólo si el otro espacio también lo es.
8. Probar que
    a) en $\mathbb{R}^3$ el complemento de un punto es $\simeq S^2$,
    b) en $\mathbb{R}^2$ el cociente que se obtiene al identificar dos puntos es $\simeq S^1$,
    c) en $S^1 \times S^1$ el complemento de un punto es $\simeq S^1 \vee S^1$,
    d) en $\mathbb{R}^3$ el cociente que identifica todos los puntos de una recta es contractíl,
    e) en $\mathbb{R}^3$ el complemento de una circunferencia es $\simeq S^1 \vee S^2$.
9. Sea X un espacio topológico y A un subespacio que es contractíl. Demostrar que si una homotopía entre Id_A y una función constante se extiende a una homotopía entre Id_X y una función que colapsa al subespacio A entonces $p : X \to X/A$ es una equivalencia homotópica.
10. Probar que un retracto de un espacio contráctil es contráctil.

11. Probar que todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es contráctil y que más aún, cualquiera de sus puntos es un retracto por deformación fuerte del convexo.

12. Probar que

    a) en el Sierpinski cualquiera de sus puntos es un retracto por deformación fuerte,

    b) en todo espacio, su cociente de Kolmogorov, que identifica los puntos que pertenecen a los mismos subconjuntos abiertos, es un retracto por deformación fuerte que es T_0,

    c) si un espacio finito es homotópicamente equivalente a un espacio T_1 entonces ambos espacios son uniones disjuntas de espacios contráctiles.

13. Considerar el espacio

$$K = [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1] \cup \{(1/n, t) : n \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leq t \leq 1\} \ \subseteq \mathbb{R}^2$$

    y demostrar que

    a) la inclusión del punto $(0,1)$ en K es un retracto por deformación débil pero no fuerte,

    b) la inclusión de K en $[0,1] \times [0,1]$ es un retracto por deformación débil pero no fuerte.

14. Probar que S^2 es un espacio simplemente conexo.

15. Sea X un espacio arco-conexo, demostrar que su grupo fundamental es abeliano si y sólo si se tiene que

    para cualesquier $\gamma_0, \gamma_1 : x \to x'$ los morfimos $\widehat{\gamma_0}, \widehat{\gamma_1} : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,x')$ coinciden.

16. Sea $f : X \to Y$ continua. Probar que si es una sección, una retracción o se factoriza por un espacio contráctil entonces la función inducida $f_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y, f(x))$ resulta un morfismo de grupos inyectivo, sobreyectivo o nulo respectivamente.

17. Sea $p : [0,1] \to S^1$ la función cociente usual que identifica los extremos, demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes

    a) las funciones $\gamma_0, \gamma_1 : S^1 \to X$ son homotópicas relativas a $p(0) = p(1)$,

    b) las funciones $\gamma_0 \circ p, \gamma_1 \circ p : [0,1] \to X$ son homotópicas relativas a $\{0,1\}$.

18. Dado un espacio X considerar

$$\Omega(X,x) = \{\gamma : S^1 \to X \ , \ \gamma(1) = x\} \subseteq \mathcal{C}(S^1, X)$$

    con la topología compacto-abierta y demostrar que se tiene que $\pi_1(X,x) = \pi_0(\Omega(X,x))$.

19. Sean X e Y espacios topológicos arbitrarios, demostrar que las proyecciones a las coordenadas inducen un homeomorfismo

$$\Omega(X \times Y, (x,y)) = \Omega(X,x) \times \Omega(Y,y)$$

    y que $\pi_1(X \times Y, (x,y))$ es isomorfo via el ejercicio anterior al producto $\pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$.

20. Sea G un grupo topológico con elemento neutro e. Probar las siguientes afirmaciones

    a) el conjunto $[X, G]$ con la operación $f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)$ es un grupo,

    b) lo anterior induce estructuras de grupo en $\pi_0(G)$ y $\pi_1(G, e)$,

    c) la nueva estructura de grupo en $\pi_1(G, e)$ coincide con la usual y ambas son abelianas.