

EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

APUNTE PARA ANÁLISIS NUMÉRICO

MARÍA GABRIELA ARMENTANO

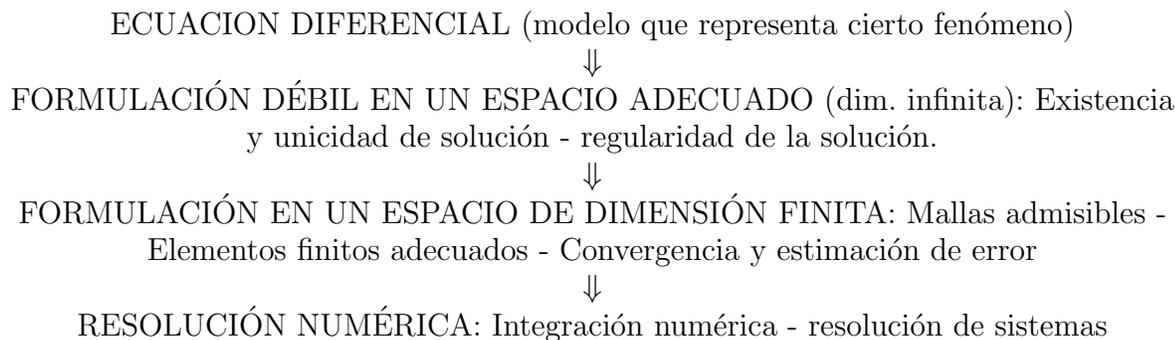
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - FCEYN - UBA

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales nos permiten modelar diversos fenómenos de la física, la biología y la ingeniería, y en general No se puede obtener una solución analítica y debermos recurrir a métodos numéricos.

Entre los métodos más utilizados y eficaces en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se encuentra **el método de elementos finitos**

La idea del proceso se representa con el siguiente esquema:



Para comprender ese proceso nada mejor que empezar por un problema unidimensional muy simple

Consideremos el problema (PC) de, dada f , hallar la función $u(x)$ que sea solución de

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 & \text{(condición tipo Dirichlet)} \end{cases}$$

en este caso podemos encontrar la solución analítica u (ya que es una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes) pero eso no sucede en general así que vamos a ver otra forma de encarar el problema.

Multiplicamos la ecuación por una función “test” (o función de prueba) e integramos por partes

$$\int_0^1 -u''(x)v(x) dx + \int_0^1 u(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \int_0^1 u(x)v(x) - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) = \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

Notemos que los términos de borde que aparecen no nos permiten incorporar el dato de Dirichlet en forma natural, entonces pensamos en incorporarlo en el espacio de funciones en los que vamos a buscar la solución (cuando tenemos que hacer esto la condición de borde se llama ESENCIAL)

Asumimos $f \in L^2(0, 1)$. Un espacio adecuado para esta formulación es el espacio de Sobolev $H_0^1(0, 1) = \{v \in L^2(0, 1) : v' \in L^2(0, 1) \text{ y } v(0) = v(1) = 0\}$ (bien definido pues en una dimensión las funciones de $H^1(0, 1)$ tienen representante continuo).

Formalmente se lo define como

$$H_0^1(0, 1) = \overline{C_0^\infty(0, 1)}^{\|\cdot\|_{H^1(0,1)}}$$

o sea el límite de funciones C^∞ con soporte en el $[0, 1]$ con la norma de H^1

$$\|u\|_{H^1(0,1)}^2 = \|u\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,1)}^2$$

Definimos $V = H_0^1(0, 1)$. En este espacio el problema en su forma débil (PD) es: Hallar $u \in V$ tal que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \int_0^1 u(x)v(x) = \int_0^1 f(x)v(x) dx, \quad \forall v \in V$$

(PC) \Rightarrow (PD)

y si la solución es regular se puede volver del débil al clásico :)

Entonces, para resolver el problema numericamente aproximamos u por funciones u_N en un espacio de dimensión finita $V_N \subset V$ y resolvemos el problema discreto (PD).

Hallar $u_N \in V_N$ tal que

$$\int_0^1 u'_N(x)v'_N(x) dx + \int_0^1 u_N(x)v_N(x) dx = \int_0^1 f(x)v_N(x) dx, \quad \forall v_N \in V_N$$

método conocido como **Método de Galerkin** que, como V_N es de dimensión finita nos conduce a resolver un simple sistema lineal.

Esto es un método CONFORME pues lo estamos planteando en un subespacio del espacio original asumiendo que las integrales involucradas son calculadas exactamente.

Preguntas que surgen naturalmente

¿Que espacios de dimensión finita podría tomar?

¿Tiene solución el sistema resultante?

¿Cuán bien aproxima la solución discreta a la solución del problema continuo?

Vayamos dando un bosquejo de como responder estas inquietudes.

¿Que espacios de dimensión finita podría tomar?

APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

Tomemos una partición del intervalo, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$, y en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ un polinomio de grado p , de manera que la construcción nos quede en el espacio V .

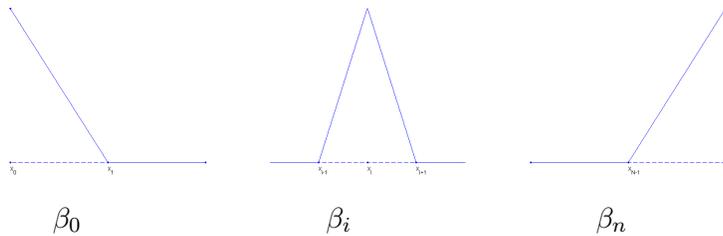
Pensando en aproximar con el grado más bajo posible (las constantes a trozos no están en H^1), podemos tomar las funciones continuas lineales a trozos que valen 0 en los extremos del intervalo.

$$V_h = \{v \in H_0^1(0, 1) : v|_{(x_j, x_{j+1})} \in \mathcal{P}_1\},$$

$$h = \max_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i| \quad (\text{tamaño de la malla})$$

Podemos usar las bases (nodales) de Lagrange β_i , $0 \leq i \leq n$ para describir los elementos de V , i.e., $\beta_i \in \mathcal{P}_1$, $\beta_i(x_j) = \delta_{i,j}$:

$$\beta_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \quad \beta_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases} \quad \beta_n(x) = \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$



¿Tiene solución el problema discreto?

Escribimos $u_h(x) = \sum_{j=0}^n U_j \beta_j(x)$, con β_j las bases de Lagrange.

Notemos que, usando estas bases tenemos que $U_j = u_h(x_j)$ y entonces, por las condiciones de borde, resulta $U_0 = 0$ y $U_n = 0$.

Ahora reemplazamos en las ecuaciones del (PD) para hallar los demás valores U_j , $1 \leq j \leq n-1$.

$$\int_0^1 u'_h(x) \beta'_i(x) dx + \int_0^1 u_h(x) \beta_i(x) dx = \int_0^1 f(x) \beta_i(x) dx, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

y nos queda:

$$\sum_{j=1}^{n-1} U_j \int_0^1 \beta'_j(x) \beta'_i(x) dx + \sum_{j=1}^{n-1} U_j \int_0^1 \beta_j(x) \beta_i(x) dx = \int_0^1 f(x) \beta_i(x) dx, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Llegamos a un sistema de ecuaciones lineales $K\mathbf{U} = \mathbf{b}$

$$\text{con } K_{i,j} = \int_0^1 \beta'_j(x) \beta'_i(x) dx + \int_0^1 \beta_j(x) \beta_i(x) dx, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(x) \beta_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 f(x) \beta_{n-1}(x) dx \end{pmatrix}$$

A la matriz K se la llama **matriz de rigidez** y al vector \mathbf{U} se lo denomina **vector de desplazamientos nodales**

Podemos facilmente hacer las cuentas para encontrar la matriz K .

Nota: En este caso es fácil ver que K es simétrica y definida positiva y por ende el sistema tiene única solución. En efecto, consideramos un vector V y calculamos $V^t K V = \sum_{i,j} V_j V_i K_{ij}$. Ahora, si definimos la función $v = \sum V_j \beta_j$ luego es claro que $\sum_{i,j} V_j V_i K_{ij} = a(v, v) = \|v\|_{H^1}^2 \geq 0$ y vale 0 solo si $v = 0$ lo que implica, por ser $\{\beta_j\}$ l.i, que $V_j = 0, \forall j$.

Si la partición la tomamos uniforme la matriz de rigidez es (verificarlo):

$$K = \begin{pmatrix} \frac{2}{h} + \frac{2}{3}h & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2}{3}h & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & \cdots \\ & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2}{3}h \end{pmatrix}$$

Si miramos la i -ésima ecuación en esta matriz tridiagonal veremos

$$\left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right)U_{i-1} + \left(\frac{2}{h} + \frac{2}{3}h\right)U_i + \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right)U_{i+1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \beta_i$$

que, dividiendo por h se puede reacomodar como

$$-\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + \frac{U_{i+1} + 4U_i + U_{i-1}}{6} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \beta_i$$

El primer término aproxima a $-u''(x_i)$ y el segundo a $u(x_i)$, si aproximamos la $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \beta_i$ mediante alguna regla de integración numérica tendremos una fórmula de diferencias finitas.

¿Cuán bien aproxima la solución discreta a la solución del problema continuo?

En linea general uno esperaría que las aproximantes converjan a u si la familia de espacios de dimensión finita que tomamos aproximan a la solución en el sentido que

$$d(u; V_N) = \inf_{v \in V_N} d(u; v) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } N \rightarrow +\infty$$

donde $d(u; v) = \|u - v\|$ en alguna norma apropiada.

Nota: La dimensión del V_N se agranda si tomamos $h \rightarrow 0$ (i.e, refinamos la malla - clásica versión h) o hacemos $p \rightarrow +\infty$ (i.e., agrandamos el grado del polinomio - versión p) o ambas cosas a la vez! (versión hp). Nosotros vamos a dedicarnos a la versión h , por ende trabajaremos en general con grados bajos.

Primero notemos que, en este problema modelo, u_h es la proyección ortogonal en norma H^1 de u en V_h ya que como

$$\begin{aligned} \int_0^1 uv + \int_0^1 u'v' &= \int_0^1 fv & \forall v \in V \\ \int_0^1 u_h v + \int_0^1 u_h' v' &= \int_0^1 fv & \forall v \in V_h \end{aligned}$$

restando se tiene que $\int_0^1 (u - u_h)v + \int_0^1 (u - u_h)'v' = 0 \quad \forall v \in V_h$.

Por lo tanto $u_h = P_{V_h}u$ y en consecuencia

$$(1) \quad \|u - u_h\|_{H^1} \leq \|u - v\|_{H^1} \quad \forall v \in V_h$$

La idea entonces para estimar el error es estimar el error de u y algún interpolante $I_h u$, ya que el error entre u y u_h será menor que el de u e $I_h u$.

Elegimos como $I_h u$ el polinomio lineal a trozos que interpola a u en los puntos de la partición.

Para el problema que analizamos, aproximando con lineales a trozos, tenemos el siguiente resultado

Teorema 1. Si la solución del (PC) u está en $H_0^1(0, 1) \cap C^2(0, 1)$ entonces

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)}$$

Notemos que gracias a la desigualdad de Poincaré y a (1) es suficiente con demostrar $\|u' - I_h u'\|_{L^2(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)}$. De cualquier manera probaremos también una estimación del error de interpolación en L^2 .

Teorema 2. Asumamos que $u \in C^2(0, 1)$ entonces

- 1) $\|u' - I_h u'\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} h \|u''\|_{L^2(0,1)}$
- 2) $\|u - I_h u\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{2} h^2 \|u''\|_{L^2(0,1)}$

Demostración. 1) Notemos que lo que queremos probar es que

$$\sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u' - (I_h u)')^2 \leq Ch^2 \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u'')^2$$

lo cual se tiene si probamos que en cada intervalito:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (u' - (I_h u)')^2 \leq Ch^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u'')^2 = Ch^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u'' - (I_h u''))^2$$

Si bien la poligonal $I_h u$ no tiene derivadas segundas en el $(0, 1)$, en cada intervalo es un polinomio de grado 1 y por ende su derivada segunda en cada intervalo es 0.

Llamamos $e = u - I_h u$, observemos que $e(x_i) = 0, 0 \leq i \leq N$. Consideramos el intervalo de referencia $[0, 1]$, la aplicación

$$[0, 1] \rightarrow [x_i, x_{i+1}]$$

y su inversa. Luego,

$$e(x) = e(x_i + \hat{x}h) = \hat{e}(\hat{x})$$

Cambiando variables observamos que, lo que queremos demostrar es que

$$\int_0^1 (\hat{e}')^2 \leq C \int_0^1 (\hat{e}'')^2$$

Como $\hat{e}(0) = \hat{e}(1) = 0$ tiene que existir un $\xi \in (0, 1)$ tal que $\hat{e}'(\xi) = 0$ y podemos escribir

$$\hat{e}'(\hat{x}) = \hat{e}'(\hat{x}) - \hat{e}'(\xi) = \int_{\xi}^{\hat{x}} \hat{e}''(s) ds$$

Tomando modulo, elevando al cuadrado y usando Hölder se tiene

$$|\hat{e}'(\hat{x})|^2 \leq \|\hat{e}''\|_{L^2(0,1)}^2 |\hat{x} - \xi|$$

y el resultado deseado se sigue integrando.

$$\int_0^1 |\hat{e}'(\hat{x})|^2 d\hat{x} \leq \|\hat{e}''\|^2 \int_0^1 |\hat{x} - \xi| d\hat{x} \leq \frac{1}{2} \|\hat{e}''\|^2$$

2) Para tener este resultado probaremos que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (u - (I_h u))^2 \leq Ch^4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u'')^2 = Ch^4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u'' - (I_h u''))^2,$$

que, pasando al intervalo de referencia es equivalente a ver que

$$\int_0^1 (\hat{e})^2 \leq C \int_0^1 (\hat{e}'')^2$$

Ahora, como $\hat{e}(\hat{x}) = \hat{e}(\hat{x}) - \hat{e}(0) = \int_0^{\hat{x}} \hat{e}'(s) ds$. Tomando modulo, usando Hölder y elevando al cuadrado resulta

$$|\hat{e}(\hat{x})|^2 \leq \|\hat{e}'\|_{L^2(0,1)}^2 \hat{x}$$

Usando 1) e integrando resulta

$$\int_0^1 |\hat{e}(\hat{x})|^2 d\hat{x} \leq \frac{1}{2} \|\hat{e}'\|_{L^2(0,1)}^2 \int_0^1 \hat{x} d\hat{x} = \frac{1}{4} \|\hat{e}'\|_{L^2(0,1)}^2$$

y la demostración concluye. \square

Nota: El resultado anterior también se tiene para cualquier $u \in H^2(0,1)$ mediante un argumento de densidad.

Técnica de Aubin-Nitsche (argumento de dualidad)

Para el problema (PC) de, dada $f \in L^2(0, 1)$, hallar $u(x)$ la solución de

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

cuya forma débil (PV) era: Hallar $u \in V = H_0^1(0, 1)$ tal que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \int_0^1 u(x)v(x) = \int_0^1 f(x)v(x) dx, \quad \forall v \in V$$

y el problema discreto asociado en un subespacio V_h de V es: Hallar $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u, v) = \int_0^1 u_h'(x)v'(x) dx + \int_0^1 u_h(x)v(x) = \int_0^1 f(x)v(x) = L(v) \quad \forall v \in V_h$$

Sabemos que si aproximamos con lineales a trozos teníamos que, asumiendo que $u \in C^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$,

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)}$$

Obviamente a partir de esta estimación se tiene que $\|u - u_h\|_{L^2(0,1)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(0,1)}$ pero la idea es ver si este orden de convergencia en L^2 se puede mejorar.

Idea central: A partir del problema bajo consideración definimos un problema auxiliar con fuente $e = u - u_h$

$$\begin{cases} -\phi''(x) + \phi(x) = e(x) & x \in (0, 1) \\ \phi(0) = \phi(1) = 0 \end{cases}$$

Asumimos que la solución de este problema satisface $\phi \in C^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$ y se tiene la estimación a priori $\|\phi\|_{H^2} \leq C \|e\|_{L^2}$.

Luego

$$\int_0^1 e^2 = \int_0^1 e(-\phi''(x) + \phi(x)) = \int_0^1 e'\phi'(x) + \int_0^1 \phi(x)e = a(e, \phi)$$

Ahora, gracias a la ortogonalidad sabemos que $a(e, w_h) = 0, \forall w_h \in V_h$.

$$\int_0^1 e^2 = a(e, \phi) = a(e, \phi - I_h\phi)$$

donde I_h es el interpolador de Lagrange que va de V en V_h . Gracias a la continuidad de a y al error de interpolación en H^1 tenemos que

$$\int_0^1 e^2 = a(e, \phi) = a(e, \phi - I_h\phi) \leq C_1 \|e\|_{H^1(0,1)} \|\phi - I_h\phi\|_{H^1(0,1)} \leq Ch |u|_{H^2(0,1)} h |\phi|_{H^2(0,1)}$$

y usando la estimación a priori resulta $\|e\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^1 e^2 \leq Ch^2 |u|_{H^2(0,1)} \|e\|_{L^2(0,1)}$ de lo que se deduce que

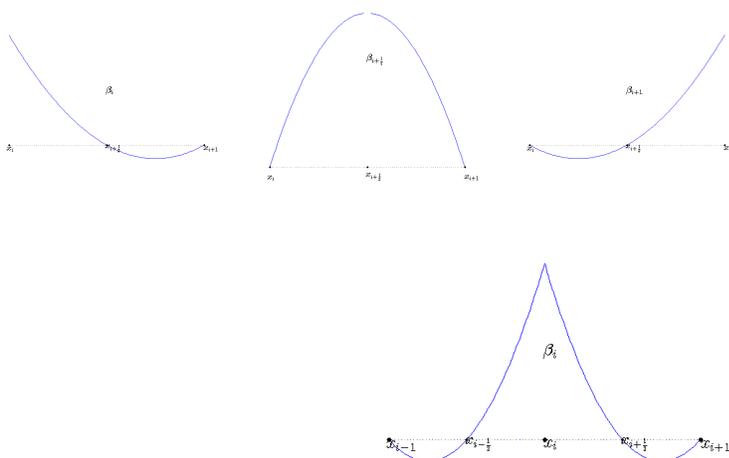
$$\|u - u_h\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2 |u|_{H^2(0,1)}$$

Si en lugar de lineales en cada intervalo quisiéramos usar cuadráticas, podríamos construir bases de Lagrange asociadas a cada intervalo $I_i = (x_i, x_{i+1})$ de la partición, usando los extremos del intervalo y (por ejemplo) el punto medio.

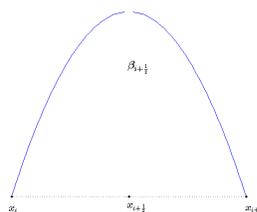
Así en cada intervalito tendríamos 3 funciones base β_i , β_{i+1} y $\beta_{i+\frac{1}{2}}$ asociadas a los puntos x_i , $x_{i+\frac{1}{2}}$ y x_{i+1} satisfaciendo $\beta_k(x_j) = \delta_{k,j}$ con $k, j = i, i + \frac{1}{2}, i + 1$.

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+\frac{1}{2}})} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+\frac{1}{2}})} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$\beta_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

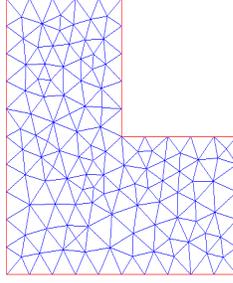


Noten que el sop $\beta_i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$



mientras que el sop $\beta_{i+\frac{1}{2}} = [x_i, x_{i+1}]$

Ahora pasamos a analizar problemas en 2D



1. PROBLEMA MODELO EN 2D

Consideramos el siguiente problema modelo (PM) (que corresponde al Problema de Poisson en 2D): Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^2 y $f \in L^2(\Omega)$. Buscamos u tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

Como antes multiplicamos por una función test v e integramos por partes (í.e., usamos las fórmulas de Green):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-\Delta u + u) v &= \int_{\Omega} f v \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_{\Omega} u v &= \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

Tomamos $V = H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}$ y la forma débil del problema es: Hallar $u \in V$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in V.$$

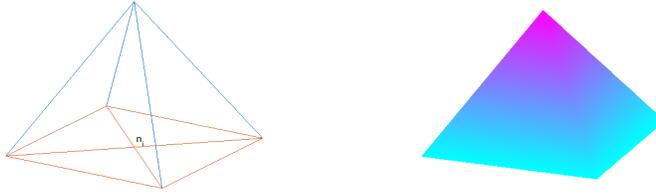
Como $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} u v = \langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)}$ y $L(v) = \int_{\Omega} f v$ es lineal, este problema tiene solución gracias al teorema de Riez.

Teorema de Representación de Riez: Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)_H$. Sea L un funcional lineal y continuo sobre H entonces existe una única $u \in H$ tal que $L(v) = (u, v)_H$ y además $\|L\|_{H'} = \|u\|_H$.

Nota: Por definición $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ y todo subespacio cerrado de un Hilbert es un Hilbert. Por ende, gracias al teorema de Riez tenemos solución única en cualquier subespacio cerrado de V .

Generalizando las ideas de antes y asumiendo que Ω tiene borde poligonal (Si no es poligonal podemos aproximarlos por dominios poligonales) **lo particionamos en triángulos de manera que:**

Dos triángulos cualesquiera de la partición \mathcal{T}_h : o no se tocan o comparten un lado o comparten un vértice



Base de Lagrange

Tamaño de la malla: $h = \max\{h_T = \text{diam}(T), T \in \mathcal{T}_h\}$

Y de nuevo podemos pensar en aproximar con lineales a trozos.

$$V_h := \{v_h \in H_0^1(\Omega) : \mathbf{v}_h|_T \in P_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

El problema discreto asociado es entonces: Hallar $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v) = L(v) \quad \forall v \in V_h$$

el cual tiene también solución única gracias al Teorema de Riez.

Notemos además que tenemos la relación de ortogonalidad

$$a(u - u_h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h$$

y como en este caso $a(u, v) = \langle u, v \rangle_{H^1}$ resulta nuevamente que $u_h = P_{V_h} u$ y para estimar el error podríamos nuevamente valer nos de estimaciones de error con un interpolador de u (para lo cual estudiaremos error de interpolación en espacios de Sobolev).

Para describir los elementos de V_h podemos considerar, como antes, las bases de Lagrange β_i , $1 \leq i \leq N$, tal que $\beta_i(n_j) = \delta_{i,j}$ siendo n_j el j -ésimo nodo (vértice) de la triangulación.

Notemos que el soporte de cada base de Lagrange β_i esta dado por $\overline{\bigcup\{T : n_i \in T\}}$

Por ejemplo, si consideramos el triángulo \hat{T} de vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y las bases de Lagrange de grado 1 en cada triángulo tendríamos

$$\beta_0(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y} \quad \beta_1(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x} \quad \beta_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}$$

2. TEORÍA ABSTRACTA

Para analizar si los problemas que vamos planteando, tanto el Problema débil como el problema discreto, tienen solución y luego estimar el error de la aproximación, necesitamos conocer la TEORÍA ABSTRACTA.

Primero introducimos algunas definiciones.

Sea V un espacio de Hilbert (espacio vectorial completo con producto interno) y sea $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$:

Definición: a es **bilineal** si cada una de las aplicaciones

$$\begin{aligned} v &\rightarrow a(u, v) \\ u &\rightarrow a(u, v) \end{aligned}$$

son lineales de $V \rightarrow \mathbb{R}$

Definición: a es **continua** si existe una constante $C_1 > 0$ tal que $|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V$.

Definición: a es **coercitiva** si existe una constante $C_2 > 0$ tal que $a(v, v) \geq C_2 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$.

Sea $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal y continuo, i.e, L es lineal y $\exists k > 0$ tal que $|L(v)| \leq k \|v\|_V, \forall v \in V$ (recordamos que como L es lineal y V es un Hilbert se tiene que continuo \Leftrightarrow acotado).

Resulta que $L \in V'$ y $\|L\|_{V'} = \sup_{v \in V \setminus 0} \frac{|L(v)|}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V \setminus 0} \frac{|(L, v)|_{V' \times V}}{\|v\|_V}$

Nos interesa analizar la existencia y unicidad de solución del Problema variacional genérico:

Hallar $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

Teorema de Lax-Milgram

Sea $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ un espacio de Hilbert. Si $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, continua y coercitiva y L es un operador lineal y continuo, el problema de hallar $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V,$$

tiene única solución.

¿Tiene solución el problema discreto asociado a nuestro problema modelo?

Notemos que gracias al Teorema de Lax-Milgram como $V_h \subset V$ (todo espacio de dimensión finita es cerrado) y **la bilinealidad, la continuidad y la coercitividad son “hereditarias”** el problema discreto

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v + \int_{\Omega} u_h v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in V_h.$$

i.e., $a(u_h, v) = L(v), \forall v \in V_h$, tiene también solución única.

Una vez resuelto el tema de la existencia y unicidad de solución, tanto para el problema continuo como el problema discreto, nos interesa comparar u y u_h .

Lema 3. Lema de Cea: Sean u y u_h las soluciones de los problemas

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \quad \text{y} \quad a(u_h, v) = L(v), \quad \forall v \in V_h,$$

con a y L satisfaciendo las condiciones del teorema de Lax-Milgram. Luego,

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C_1}{C_2} \|u - v\|_V, \quad \forall v \in V_h$$

Demostración. Notemos que, como

$$\begin{aligned} a(u, v) &= L(v), \quad \forall v \in V \\ a(u_h, v) &= L(v), \quad \forall v \in V_h \end{aligned}$$

Como $V_h \subset V$ y a es bilineal, restando estas dos ecuaciones resulta la relación de ortogonalidad $a(u - u_h, w) = 0 \forall w \in V_h$.

Entonces Como a es coercitiva, continua y se tiene la relación de ortogonalidad obtenemos que

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V^2 &\stackrel{\text{coercitividad}}{\leq} \frac{1}{C_2} a(u - u_h, u - u_h) \stackrel{\text{ortogonalidad}}{=} \frac{1}{C_2} a(u - u_h, u) \\ &\stackrel{\text{ortogonalidad}}{=} \frac{1}{C_2} a(u - u_h, u - v) \stackrel{\text{continuidad}}{\leq} \frac{C_1}{C_2} \|u - u_h\|_V \|u - v\|_V. \end{aligned}$$

□

En definitiva, bajo ciertas hipótesis sobre la forma bilineal a y la forma lineal L , podemos afirmar existencia y unicidad de solución para el problema continuo $a(u, v) = L(v), v \in V$ y el discreto $a(u_h, v) = L(v), v \in V_h$ y establecer que el error entre u y su aproximante u_h satisfacía

$$\|u - u_h\|_V \leq C \|u - v_h\|_V, \quad \forall v_h \in V_h,$$

relación que básicamente nos mostraba que cuán buena resultaba finalmente la aproximación dependía fuertemente de $d(u, V_h)$. Entonces para poder estimar esa distancia es importante que caractericemos como son los espacios V_h que usamos en elementos finitos.

ELEMENTOS FINITOS - DEFINICIÓN Y GENERALIDADES

Nuestro objetivo ahora es definir de una manera más formal a que llamamos elementos finitos y mostrar ejemplos y propiedades de estos elementos.

El método de elementos finitos puede verse (en principio) como un método de Galerkin con tres características principales:

1. Tenemos una triangulación \mathcal{T}_h (admisibles) del conjunto Ω donde está formulado el problema, i.e., $\bar{\Omega}$ puede escribirse como la unión de elementos $\bar{K} \in \mathcal{T}_h$.

Nota: por ejemplo en 2D por triangulación admisible entendemos que cada par de elementos K_i, K_j (triángulos o rectángulos) tienen en común un lado entero, un vértice o tienen intersección vacía.

2. Las funciones $v_h \in V_h$ son polinomios a trozos en el sentido que dado $K \in \mathcal{T}_h$ la función $v_h|_K$ es un polinomio, cualquiera sea $v_h \in V_h$ (en su versión más general podrían ser transformaciones de polinomios con ciertas propiedades)
3. Podemos construir facilmente las bases del espacio V_h las cuales deberian tener un soporte pequeño.

Podemos dar una definición más formal de a que llamaremos **elemento finito**.

i) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ con interior no vacío y borde suave a trozos (K será en 1D un intervalo, en 2D un triángulo o rectángulo y en 3D un tetraedro o cubo).

ii) Sea \mathcal{P} un espacio de dimensión finita, $\dim \mathcal{P} = s$, de funciones definidas en K (usualmente \mathcal{P} es el espacio de polinomios de cierto grado o transformaciones de polinomios con ciertas propiedades).

iii) Sea $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_s\}$ bases para el dual de \mathcal{P} (nos sirven para caracterizar a los elementos de \mathcal{P} , veremos varios ejemplos).

Definición: $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ es un elemento finito. Las bases $\{\phi_1, \dots, \phi_s\}$ de \mathcal{P} cumplen que $\mathcal{N}_i(\phi_j) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, s$.

Definición: Decimos que \mathcal{N} determina \mathcal{P} si $\forall \phi \in \mathcal{P}$ con $\mathcal{N}(\phi) = 0$ se tiene que $\phi = 0$.

Ejemplo: (Lagrange 1D - grado 1)

$K = [0, 1]$ (intervalo de referencia), $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$, $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2\}$ con $\mathcal{N}_1(v) = v(0)$ y $\mathcal{N}_2(v) = v(1)$

Luego $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ es un elemento finito.

Nota: Observemos que cualquier elemento de grado 1 en el intervalo $[0, 1]$ se identifica univocamente por su valor en 0 y en 1.

Ejemplo: (Lagrange 2D - grado 1)

$K = T$ y $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$. Sean $a_i, i = 1, 2, 3$ los vértices del triángulo T . Tomamos $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3\}$ donde $\mathcal{N}_i(v) = v(a_i), i = 1, 2, 3$.

Luego $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ es un elemento finito.

Nota: Observemos que cualquier elemento de grado 1 en el triángulo T se identifica univocamente por su valor en sus vértices (y al considerar estas bases en una triangulación se pegan con continuidad)

Ejemplo: (Crouzeix-Raviart 2D - grado 1)

$K = T$ y $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$. Sean $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ los puntos medios de los lados del triángulo T . Tomamos $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3\}$ donde $\mathcal{N}_i(v) = v(\alpha_i), i = 1, 2, 3$.

Luego $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ es un elemento finito.

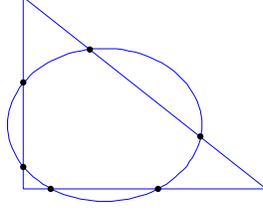
Nota: Observemos que cualquier elemento de grado 1 en el triángulo T se identifica univocamente por su valor en los puntos medios de los lados (y al considerar estas bases en una triangulación se pegan con continuidad solo en los puntos medios)

Definición: Un conjunto de puntos $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ es \mathcal{P}_k -unisolvante si dada $q \in \mathcal{P}_k$ con $q(p_i) = 0, i = 1, \dots, N$, entonces $q \equiv 0$.

No es trivial construir conjuntos unisolventes en el espacio n -dimensional de polinomios de grado k al que llamamos \mathcal{P}_k cuya dimensión es

$$\dim \mathcal{P}_k = \binom{n+k}{k} = \frac{(k+1) \cdots (k+n)}{n!},$$

Consideramos el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ y los puntos que muestra la figura. Esos 6 puntos NO forman un conjunto \mathcal{P}_2 -unisolvante pues $p(x,y) = (x - \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{1}{3})^2 - \frac{4}{25}$ se anula en esos 6 puntos y no es el polinomio nulo.



El siguiente Lema nos ayuda a pensar como podríamos construir conjunto de puntos \mathcal{P}_d -unisolvantes.

Lema 4. Sea P un polinomio de grado $d \geq 1$ en \mathbb{R}^n que se anula en un hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^n : H(x) = 0\}$ entonces P se puede escribir como $P = HQ$ con Q polinomio de grado $d-1$.

Demostración. Podemos asumir, por un simple cambio de variables, que $H(\mathbf{x}) = x_n$, i.e., el hiperplano es $x_n = 0$.

Por simplicidad de notación lo demostramos para $n = 2$.

Dado $P \in \mathcal{P}_d$ podemos escribir

$$P(x,y) = \sum_{j=0}^d \sum_{\substack{i=0 \\ 0 \leq i+j \leq d}}^d a_{ij} x^i y^j = \sum_{j=0}^d \sum_{i=0}^{d-j} a_{ij} x^i y^j$$

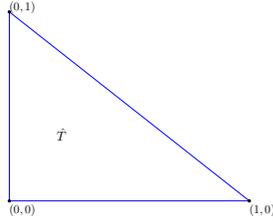
Como P se anula en H , $P(x,0) = \sum_{i=0}^d a_{i0} x^i = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces $a_{i0} = 0, 1 \leq i \leq d$ y tenemos

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \sum_{j=1}^d \sum_{i=0}^{d-j} a_{ij} x^i y^j = y \left(\sum_{j=1}^d \sum_{i=0}^{d-j} a_{ij} x^i y^{j-1} \right) \\ &\stackrel{k=j-1}{=} y \left(\sum_{k=0}^{d-1} \sum_{i=0}^{d-1-k} a_{i,k+1} x^i y^k \right) = y Q(x,y). \end{aligned}$$

Lo que demuestra que $P = HQ$ con $Q \in \mathcal{P}_{d-1}$. □

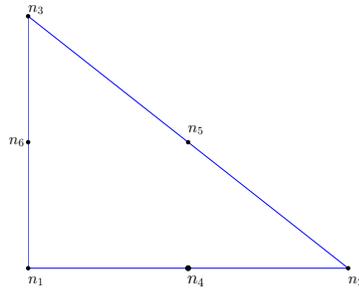
Triángulo de referencia

Llamaremos triángulo de referencia a: $\hat{T} = \{(\hat{x}, \hat{y}) \mid 0 < \hat{x} < 1, 0 < \hat{y} < 1 - \hat{x}\}$.



Sabemos que $\dim \mathcal{P}_2 = 6$. Consideramos los vértices del triángulo y los puntos medios de cada lado. Usando el Lema veamos que forman un conjunto \mathcal{P}_2 -unisolviente.

Numeramos los nodos de \hat{T} de la siguiente forma $n_1 = (0,0)$, $n_2 = (1,0)$, $n_3 = (0,1)$, $n_4 = (\frac{1}{2}, 0)$, $n_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $n_6 = (0, \frac{1}{2})$. Las variables en el triángulo de referencia son notadas con \hat{x}, \hat{y} .



Sea $\Phi \in \mathcal{P}_2$ tal que Φ se anula en esos 6 puntos, queremos ver que $\Phi \equiv 0$.

Como Φ se debe anular en los tres nodos 2, 5 y 3, que están en el hiperplano de ecuación $1 - \hat{x} - \hat{y} = 0$, y restringido a ese hiperplano (que notamos H_1) Φ es un polinomio de grado 2 en 1 variable resulta $\Phi|_{H_1} \equiv 0$ y por el Lema tenemos que

$$\Phi = (1 - \hat{x} - \hat{y})Q(\hat{x}, \hat{y})$$

Ahora Φ se anula también en los nodos 1 y 6 que no están en H_1 , por ende el polinomio Q (que es de grado 1) se debe anular en esos nodos.

Llamemos H_2 al hiperplano $\hat{x} = 0$, siendo que $Q|_{H_2}$ es un polinomio de grado 1 en una variable que se anula en dos valores distintos, debe ser $Q|_{H_2} \equiv 0$ y entonces por el Lema se tiene que $Q = \hat{x}R(\hat{x}, \hat{y})$ con R un polinomio de grado 0.

Luego $\Phi = (1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}R$ con R una constante. Pero Φ también se anula en el nodo 4 que no está ni en H_1 ni en H_2 entonces debe ser $R = 0$ y por ende $\Phi \equiv 0$.

Hemos probado que ese conjunto es \mathcal{P}_2 -unisolvante.

Notamos además que siguiendo ese razonamiento es claro que la base de Lagrange $\hat{\beta}_4$ está dada por:

$$\hat{\beta}_4(\hat{x}, \hat{y}) = 4(1 - \hat{x} - \hat{y})\hat{x}$$

Ejercicio: Hallar las otras 5 bases de Lagrange.

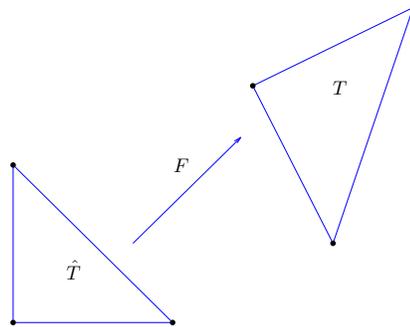
Una vez que tenemos las bases definidas en el triángulo de referencia \hat{T} las podemos definir en cualquier triángulo T de vértices a_1, a_2, a_3 usando la transformación afin $F : \hat{T} \rightarrow T$.

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + a_1 = B \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \mathbf{c}$$

Es claro además que F es inversible (notar que $|\det(B)| = 2|T|$).

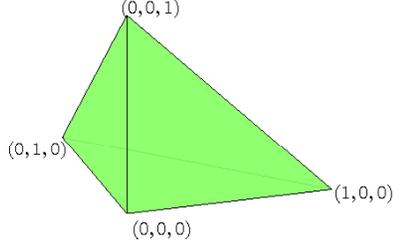
Nota: en este caso elegimos que $F(0, 0) = a_1$, $F(1, 0) = a_2$ y $F(0, 1) = a_3$ pero este “orden de asignación” no es importante

La base de Lagrange se define como $\beta_j(x, y) = \beta_j(F(\hat{x}, \hat{y})) = (\beta_j \circ F)(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{\beta}_j(\hat{x}, \hat{y})$



Estas ideas, de trabajar en un dominio de referencia y luego transformar, se generalizan a más dimensiones y a más tipos de elementos.

Por ejemplo en 3 dimensiones el tetraedro de referencia será: $\hat{T} = \{(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \hat{x} \leq 1, 0 \leq \hat{y} \leq 1 - \hat{x}, 0 \leq \hat{z} \leq 1 - \hat{x} - \hat{y}\}$



Podemos también hacer **mallas rectangulares**, en este caso vamos a considerar los Q_k **espacios formados por polinomios de grado $\leq k$ en cada variable**, cuya dimensión es claramente $(k+1)^n$.

Por ejemplo en dos dimensiones

$$Q_k = \left\{ \sum_j c_j p_j(x) q_j(y), \text{ con } p_j, q_j \text{ polinomios de grado } \leq k \right\}$$

Si tomamos como rectángulo de referencia $\hat{R} = [0, 1] \times [0, 1]$ y las bases nodales para el Q_1 (llamadas bilineales) son:

$$\begin{aligned} \hat{q}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= (1 - \hat{x})(1 - \hat{y}), & \hat{q}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}(1 - \hat{y}) \\ \hat{q}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}\hat{y}, & \hat{q}_4(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}(1 - \hat{y}) \end{aligned}$$

Notemos que en este caso la matriz de transformación afín que lleva \hat{R} en un rectángulo R es diagonal.

Nota: Trabajando también con transformaciones afines podemos llevar a \hat{R} a un paralelogramo, pero si queremos cuadriláteros más generales tendríamos que trabajar con otro tipo de transformaciones.

El siguiente Lema es fundamental para establecer la relación entre funciones \hat{v} definidas en \hat{T} y funciones v definidas en T , con $T \in \mathcal{T}_h$ (T triángulo, tetraedro, rectángulo, cubo).

Lema 5. $v \in H^{k+1}(T) \Leftrightarrow \hat{v} \in H^{k+1}(\hat{T})$ y se tiene las siguientes relaciones

- i) $|v|_{j,T} \leq C \|B^{-1}\|^j |\det B|^{\frac{1}{2}} |\hat{v}|_{j,\hat{T}}$
- ii) $|\hat{v}|_{j,\hat{T}} \leq C \|B\|^j |\det B|^{-\frac{1}{2}} |v|_{j,T}$

con $j = 0, \dots, k+1$.

Demostración. Las relaciones se deducen basicamente a partir del cambio de variables. En \mathbb{R}^n tendremos la transformación afin $F(\hat{\mathbf{x}}) = B\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c}$ por lo que $\frac{\partial F_i}{\partial \hat{x}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_k} = B_{i,k}$ i.e., su matriz diferencial es B y el jacobiano será $\det(B)$.

Analogamente $\frac{\partial F_i^{-1}}{\partial x_k} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_k} = (B^{-1})_{i,k}$

Veamos i). Es claro que

$$\int_T v^2 d\mathbf{x} = \int_{\hat{T}} \hat{v}^2 |\det(B)| d\hat{\mathbf{x}}$$

Entonces

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_k} (B^{-1})_{k,i}$$

Para las derivadas segundas nos quedará

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}_l \partial \hat{x}_k} (B^{-1})_{l,j} (B^{-1})_{k,i}$$

Como $|B_{k,i}^{-1}| = | \langle e_k, B^{-1}e_i \rangle | \leq \|B^{-1}\|_2$, resulta

$$\left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i} \right|^2 \leq C(n) \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}_l \partial \hat{x}_k} \right|^2 \|B^{-1}\|_2^4$$

Ahora integrando en el triángulo y cambiando variables queda

$$\begin{aligned} \int_T \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} &\leq C(n) \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \int_T \left| \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}_l \partial \hat{x}_k}(F^{-1}(\mathbf{x})) \right|^2 \|B^{-1}\|_2^4 d\mathbf{x} \\ &= C(n) \|B^{-1}\|_2^4 \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \int_{\hat{T}} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}_l \partial \hat{x}_k}(\hat{\mathbf{x}}) \right|^2 |\det B| d\hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

De lo que se concluye que

$$|v|_{2,T} \leq C(n) |\det B|^{\frac{1}{2}} \|B^{-1}\|^2 |\hat{v}|_{2,\hat{T}}$$

La misma idea es para el resto de las derivadas y analogamente se tiene también ii). \square

Otro resultado que utilizaremos es el siguiente:

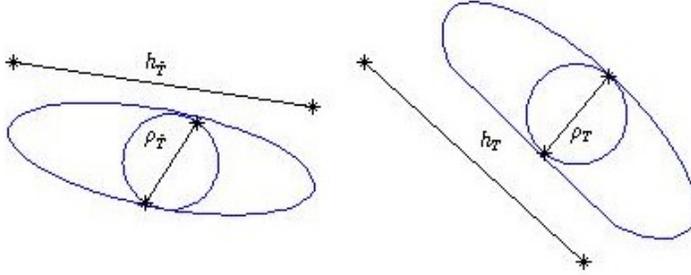
Proposición 6. Sean \hat{T} y T dos conjuntos abiertos en \mathbb{R}^n afinmente equivalentes, i.e., $\exists F : \hat{T} \rightarrow T$ una transformación afin que cumple que $F(\hat{T}) = T$, $F(\hat{\mathbf{x}}) = B\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c}$ luego

$$\|B\| \leq \frac{h_T}{\rho_{\hat{T}}} \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{h_{\hat{T}}}{\rho_T}$$

donde h_T denota el diámetro de T , $h_{\hat{T}}$ el diámetro de \hat{T} , $\rho_{\hat{T}} = \sup\{\text{diam}(\hat{S}), \hat{S} \text{ bola} \subset \hat{T}\}$ y $\rho_T = \sup\{\text{diam}(S), S \text{ bola} \subset T\}$,

Demostración. Esta proposición da una acotación del $\|DF\| = \|B\|$ y del $\|DF^{-1}\| = \|B^{-1}\|$.

$$\hat{T} \xrightarrow{F} T$$



$$\|B\| = \sup_{z \neq 0} \frac{\|Bz\|}{\|z\|} = \sup_{z \neq 0} \|B \frac{z}{\|z\|} \rho_{\hat{T}}\| \frac{1}{\rho_{\hat{T}}}$$

Sea $w = \frac{z}{\|z\|} \rho_{\hat{T}}$. Entonces $\|w\| = \rho_{\hat{T}}$ y tenemos

$$\|B\| = \sup_{\|w\|=\rho_{\hat{T}}} \|Bw\| \frac{1}{\rho_{\hat{T}}} = \frac{1}{\rho_{\hat{T}}} \sup_{\|w\|=\rho_{\hat{T}}} \|Bw\|.$$

Como $\|w\| = \rho_{\hat{T}}$ y el diámetro de la mayor bola contenida en \hat{T} es $\rho_{\hat{T}}$, deben existir \hat{x} y \hat{y} en \hat{T} tales que $\hat{x} - \hat{y} = w$. Podemos escribir entonces

$$\|Bw\| = \|B(\hat{x} - \hat{y})\| = \|F(\hat{x}) - F(\hat{y})\| = \|x - y\| \leq h_T,$$

donde en la última desigualdad usamos que x e y están en T , ya que $F(\hat{T}) = T$, y que el diámetro de T es h_T . Concluimos entonces que $\|B\| \leq \frac{h_T}{\rho_{\hat{T}}}$.

La cuenta para B^{-1} es completamente análoga. \square

Ahora lo que queremos hacer es construir el **Interpolador de Lagrange** para funciones en espacios de Sobolev y estimar el error de interpolación. Para hacer eso primero vamos a ver el siguiente resultado (Bramble-Hilbert):

Lema 7. *Bramble-Hilbert (caso simple)*

Sea $\hat{w} \in H^2(\hat{T})$ con $\hat{w}(\hat{n}_j) = 0$, con $\{\hat{n}_j\}, j = 1, 2, 3$ vértices de T . Existe una constante $C_{BH} > 0$ tal que

$$\|\hat{w}\|_{H^1(\hat{T})} \leq C_{BH} |\hat{w}|_{H^2(\hat{T})}$$

Demostración. por compacidad.

Supongamos que tal constante no existe, entonces dado $n \in \mathbb{N}$ puedo hallar una sucesión $\hat{w}_n \in H^2(\hat{T})$, con $\hat{w}_n(\hat{n}_j) = 0$, tal que

$$\|\hat{w}_n\|_{H^1(\hat{T})} > n |\hat{w}_n|_{H^2(\hat{T})}$$

Por simplicidad podemos asumir que $\|\hat{w}_n\|_{H^1(\hat{T})} = 1$

y por ende

$$|\hat{w}_n|_{H^2(\hat{T})} < \frac{1}{n} \leq 1,$$

lo que implica que la sucesión esta uniformemente acotada en $H^2(\hat{T})$ por lo que tiene una subsucesión $\hat{w}_{n_k} \in H^2(\hat{T})$ que converge fuerte en $H^1(\hat{T})$ y débil en $H^2(\hat{T})$ (Teorema de Rellich).

Esto es, existe $\hat{w}^* \in H^1(\hat{T})$ tal que $\hat{w}_{n_k} \rightarrow \hat{w}^*$.

Por otra parte, notemos que

$$\|\hat{w}_{n_k} - \hat{w}_{m_k}\|_{H^2(\hat{T})}^2 = \|\hat{w}_{n_k} - \hat{w}_{m_k}\|_{H^1(\hat{T})}^2 + |\hat{w}_{n_k} - \hat{w}_{m_k}|_{H^2(\hat{T})}^2 \leq \|\hat{w}_{n_k} - \hat{w}_{m_k}\|_{H^1(\hat{T})}^2 + \frac{1}{n_k^2} + \frac{1}{m_k^2} \rightarrow 0,$$

asi que la subsucesión es de Cauchy y por ende resulta también convergente en $H^2(\hat{T})$.

Como

$$\|\hat{w}_{n_k}\|_{H^2(\hat{T})}^2 = \|\hat{w}_{n_k}\|_{H^1(\hat{T})}^2 + |\hat{w}_{n_k}|_{H^2(\hat{T})}^2 \rightarrow \|\hat{w}^*\|_{H^1(\hat{T})}^2$$

concluimos que $\hat{w}_{n_k} \rightarrow \hat{w}^*$ en H^2 con $|\hat{w}^*|_{H^2(\hat{T})} = 0$.

De lo que resulta que $\hat{w}^* \in \mathcal{P}_1$ pero

$$|\hat{w}^*(n_j)| = |\hat{w}^*(n_j) - \hat{w}_{n_k}(n_j)| \leq \|\hat{w}^* - \hat{w}_{n_k}\|_{H^2(\hat{T})} \rightarrow 0,$$

y entonces \hat{w}^* es un polinomio de grado 1 en 2 variables que se anula en los vértices de \hat{T} por lo que resulta $\hat{w}^* = 0$.

Lo que nos conduce a un absurdo ya que $1 = \|\hat{w}_{n_k}\|_{H^1(\hat{T})} \rightarrow \|\hat{w}^*\|_{H^1(\hat{T})} = 0$.

□

Definición: Una familia de triangulaciones \mathcal{T}_h se dice regular si $\exists \sigma > 0$ tal que

$$\frac{h_T}{\rho_T} < \sigma, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

donde h_T es el diametro de T y ρ_T el diametro de la mayor bola contenida en T .

Notemos que si la familia de triangulaciones es regular entonces $|T| \sim h_T^2$.

Teorema 8. *Interpolación de Lagrange*

Asumamos que $u \in H^2(\Omega)$. Sea \mathcal{T}_h una triangulación regular de Ω y sea $\Pi_h(u)$ el interpolador de Lagrange de u . Existe una constante positiva C (que depende solo de la regularidad de la malla) tal que

- i) $\|u - \Pi_h(u)\|_{L^2(T)} \leq Ch_T^2 |u|_{H^2(T)}$
- ii) $\|\nabla(u - \Pi_h(u))\|_{L^2(T)} \leq Ch_T |u|_{H^2(T)}$

Demostración. Como $\hat{u} - \Pi_h \hat{u} \in H^2(\hat{T})$ y $(\hat{u} - \Pi_h \hat{u})(\hat{n}_j) = 0$ aplicando el Lema previo tenemos que

$$\|\hat{u} - \Pi_h \hat{u}\|_{H^1(\hat{T})} \leq C_{BH} |\hat{u}|_{H^2(\hat{T})}$$

Veamos primero i)

Como en particular $\|\hat{u} - \Pi_h \hat{u}\|_{L^2(\hat{T})} \leq C_{BH} |\hat{u}|_{H^2(\hat{T})}$

solo tenemos que proceder a cambiar variables para ver como es el reescale.

Del Lema 5 tenemos que

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(T)} \leq |\det B|^{1/2} \|\hat{u} - \Pi_h \hat{u}\|_{L^2(\hat{T})} \leq C_{BH} |\det B|^{1/2} |\hat{u}|_{H^2(T)}$$

y

$$|\hat{u}|_{H^2(\hat{T})} \leq C \|B\|^2 |\det B|^{-\frac{1}{2}} |u|_{H^2(\hat{T})}$$

de lo que resulta

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\hat{T})} \leq C \|B\|^2 |u|_{H^2(\hat{T})}.$$

Usando la proposición concluimos que

$$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(\hat{T})} \leq Ch_T^2 |u|_{H^2(\hat{T})}.$$

Para ii)

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - \Pi_h u)\|_{L^2(T)} &\leq C |\det B|^{1/2} \|B^{-1}\| \|\nabla(\hat{u} - \Pi_h \hat{u})\|_{L^2(\hat{T})} \\ &\leq C |\det B|^{1/2} \|B^{-1}\| \|\hat{u}\|_{H^2(T)} \leq C |\det B|^{1/2} \|B^{-1}\| \|B\|^2 |\det B|^{-\frac{1}{2}} |u|_{H^2(T)} \\ &\leq C \|B^{-1}\| \|B\|^2 |u|_{H^2(T)} \leq C \left(\frac{h_T}{\rho_{\hat{T}}}\right)^2 \frac{h_{\hat{T}}}{\rho_T} |u|_{H^2(T)} \\ &\leq Ch_T |u|_{H^2(T)} \end{aligned}$$

donde en la ultima desigualdad usamos la regularidad de la malla. □

Corolario 9. $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \bar{T}$, $u \in H^2(\Omega)$. Luego

- i) $\|u - \Pi_h(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)}$
- ii) $\|\nabla(u - \Pi_h(u))\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch |u|_{H^2(\Omega)}$ con $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$

Dem: Se obtiene desde las estimaciones en cada triángulo, sumando sobre $T \in \mathcal{T}_h$.

Tenemos el siguiente resultado de regularidad y de estimaciones a priori para soluciones de problemas elípticos en dominios convexos

Teorema 10. Para el problema (PC1), $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \neq \emptyset$,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_N & \text{en } \Gamma_N \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_D. \end{cases}$$

Si $f \in L^2(\Omega)$, $g_N \in H^1(\Gamma_N)$ entonces $u \in H^2(\Omega)$ y existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g_N\|_{H^1(\Gamma_N)})$$

Análogo resultado se tiene para el problema (PC2), $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$,

$$\begin{cases} -\Delta u + a_0 u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g_N & \text{en } \Gamma_N \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_D. \end{cases}$$

con $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_0 \geq \beta > 0$

Luego podemos afirmar en particular que si Ω es convexo tendremos para el problema modelo (PM), aproximando con lineales a trozos, que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Por argumentos de dualidad podemos en este caso obtener también estimaciones óptimas para el error en $L^2(\Omega)$.

Asociado a (PM) planteamos el problema auxiliar, con fuente $e = u - u_h$,

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \phi = e & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

del cual sabemos que $a(e, v) = 0, \forall v \in V_h$ y que $\|e\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)}$. Luego, usando estos hechos junto con las estimaciones a priori tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^2 &= \int_{\Omega} e(-\Delta\phi + \phi) = a(e, \phi) \\ &= a(e, \phi - \Pi_h\phi) \leq C_1\|e\|_{H^1(\Omega)}\|\phi - \Pi_h\phi\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)}h\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \leq Ch^2\|u\|_{H^2(\Omega)}\|e\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

de lo que resulta

$$\|e\|_{L^2(\Omega)} \leq h^2\|u\|_{H^2(\Omega)}$$

2.1. Desigualdad de Poincaré para funciones de soporte compacto.

Teorema 11. *Sea Ω un convexo. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Demostración. Lo demostramos para $n = 2$ y en el caso Ω un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$.

Usando la densidad de las $C_0^1(\Omega)$ lo demostramos para esta y luego pasamos al límite. Vemos primero el resultado para $p = 1$ y a partir de este para cualquier p , $1 \leq p < \infty$.

Como u vale cero en el borde de Ω podemos escribir

$$u(x, y) = u(x, y) - u(b, y) = - \int_x^b \frac{\partial u}{\partial x}(s, y) ds,$$

luego tomando modulo resulta:

$$|u(x, y)| \leq \int_x^b \left| \frac{\partial u}{\partial x}(s, y) \right| ds \leq \int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial x}(s, y) \right| ds$$

Integrando en el rectángulo nos queda

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^1(\Omega)} &= \int_a^b \int_c^d |u(x, y)| \leq (b-a) \int_c^d \int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial x}(s, y) \right| ds dy \\ &\leq (b-a) \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Ahora aplicamos el resultado para $v = u^p$ entonces

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p(\Omega)} &= \int_a^b \int_c^d |u(x, y)|^p \leq (b-a) \int_c^d \int_a^b \left| \frac{\partial u^p}{\partial x}(s, y) \right| ds dy \\ &= (b-a) \int_c^d \int_a^b p |u^{p-1}| \left| \frac{\partial u}{\partial x}(s, y) \right| ds dy \end{aligned}$$

Para cualquier $\epsilon > 0$ podemos escribir usando la desigualdad $\alpha\beta \leq \frac{1}{q}\alpha^q + \frac{1}{p}\beta^p$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq (b-a) \int_c^d \int_a^b p \epsilon |u^{p-1}| \frac{1}{\epsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(s, y) \right| ds dy \leq C \left(\int_{\Omega} |u|^p \epsilon^q + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(s, y) \right|^p \frac{1}{\epsilon^p} \right)$$

donde usamos que $q = \frac{p}{p-1}$. Ahora elijo ϵ suficientemente chico para pasar el primer término restando y obtengo

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

□

Desigualdad de Poincaré para funciones de promedio 0.

Teorema 12. *Sea Ω un convexo con $d = \text{diam}(\Omega)$. Si $u \in H^1(\Omega)$ con $\int_{\Omega} u = 0$ entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_0 \leq C d \|\nabla u\|_0$$

Dem: (de Dobrowolski) Como las funciones $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ son densas en $H^1(\Omega)$ vamos a hacer las cuentas sobre las regulares y después argumentaremos por densidad.

Usando la expresión integral del error de Taylor podemos escribir

$$u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}) = \int_0^1 \nabla u(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) dt$$

Integrando respecto de \mathbf{y} y usando que $\int_\Omega u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0$ tenemos

$$\underbrace{\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})) d\mathbf{y}}_{=u(\mathbf{x})} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \left\{ \int_0^1 \nabla u(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) dt \right\} d\mathbf{y}$$

Como $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq d$,

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{x})| &\leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \left\{ \int_0^1 |\nabla u(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})| dt \right\} d\mathbf{y} \\ &\leq \frac{d}{|\Omega|} \int_\Omega \left\{ \int_0^1 |\nabla u(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})| dt \right\} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado, y aplicando Hölder

$$|u(\mathbf{x})|^2 \leq \left(\frac{d}{|\Omega|}\right)^2 |\Omega| \left(\int_\Omega \left\{ \int_0^1 |\nabla u(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})|^2 dt \right\} d\mathbf{y} \right)$$

Ahora integramos respecto de \mathbf{x}

$$\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq \frac{d^2}{|\Omega|} \int_\Omega \left(\int_\Omega \left\{ \int_0^1 |\nabla u(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})|^2 dt \right\} d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}$$

Es claro que por densidad tenemos también esta desigualdad para toda $u \in H^1(\Omega)$.

Como $|\nabla u| \in L^2(\Omega)$ puedo extenderla por 0 a todo \mathbb{R}^n . Llamemos f a la extensión de $|\nabla u|$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &\leq \frac{d^2}{|\Omega|} \int_{\Omega \times \Omega} \left\{ \int_0^1 f^2(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) dt \right\} d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\ &= \frac{d^2}{|\Omega|} \int_{\Omega \times \Omega} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} f^2(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) dt \right\} d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\ &\quad + \frac{d^2}{|\Omega|} \int_{\Omega \times \Omega} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) dt \right\} d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\ &= I + II \end{aligned}$$

$$I = \frac{d^2}{|\Omega|} \int_{\Omega \times \Omega} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} f^2(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) dt \right\} d\mathbf{y} d\mathbf{x} = \frac{d^2}{|\Omega|} \int_\Omega \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f^2(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\} dt d\mathbf{x}$$

Cambio variables llamando $\mathbf{z} = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$, entonces $d\mathbf{z} = (1-t)^n d\mathbf{y}$ y como la integral respecto de \mathbf{y} es en \mathbb{R}^n nos queda

$$\begin{aligned}
I &= \frac{d^2}{|\Omega|} \int_{\Omega} \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f^2(\mathbf{z}) \frac{1}{(1-t)^n} d\mathbf{z} \right\} dt d\mathbf{x} \\
&= \frac{d^2}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f^2(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \right\} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)^n} dt \right\} d\mathbf{x} = d^2 \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f^2(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \right\} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)^n} dt \right\} \\
&\leq C(n) d^2 \int_{\mathbb{R}^n} f^2(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = C(n) d^2 \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{z})|^2 d\mathbf{z}
\end{aligned}$$

Las mismas ideas usamos para acotar II , pero integrando primero respecto de \mathbf{x} , con el cambio de variables $\mathbf{z} = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$, $d\mathbf{z} = t^n d\mathbf{x}$, en este caso nos queda

$$\begin{aligned}
II &= \frac{d^2}{|\Omega|} \int_{\Omega \times \Omega} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) dt \right\} d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\
&= \frac{d^2}{|\Omega|} \int_{\Omega} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f^2(\mathbf{z}) \frac{1}{t^n} d\mathbf{z} \right\} dt d\mathbf{y} \\
&= \frac{d^2}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f^2(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \right\} \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^n} dt \right\} d\mathbf{y} \\
&\leq C(n) d^2 \int_{\mathbb{R}^n} f^2(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = C(n) d^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2(\mathbf{z}) d\mathbf{z}
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = I + II \leq C(n) d^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

como queriamos probar

□