

# Álgebra I - Final - 22/7/2014

1	2	3	4	5	Calificación

Nombre:

No. de libreta:

Carrera:

1. Sea  $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}$  y sea  $\mathcal{R}$  la relación en  $\mathcal{P}(X)$  definida por

$$A\mathcal{R}B \iff A \Delta \{1, 2\} \subseteq B \Delta \{1, 2\}$$

- a) Decidir si  $\mathcal{R}$  es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.  
b) Calcular la cantidad de subconjuntos  $B$  de  $X$  de 5 elementos tales que  $\emptyset \mathcal{R} B$ .
2. a) Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  vale que

$$\prod_{i=1}^n (n+i) = 2^n \prod_{i=1}^n (2i-1).$$

- b) Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(2^n)!$  es divisible por  $2^{2^n-1}$  y no es divisible por  $2^{2^n}$ .
3. Encontrar el resto de dividir a  $123^{456789}$  por 43.
4. Sea  $\omega$  una raíz séptima primitiva de la unidad. Probar que

$$\sum_{j=0}^{38} \omega^j + \bar{\omega}^j = 1 \qquad \operatorname{Re} \left( \sum_{j=0}^{38} \omega^j - \omega^{-j} \right) = 0.$$

5. Sea  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$  un polinomio mónico de grado 7 tal que:

- $f(0) = 0$  y  $f(i) = -3i$ ;
- $f'(0) = 0$  y  $f'(i) = -21$ .

Hallar las raíces no reales del polinomio  $f(x) - 3x^7$  y su multiplicidad. Hallar todas las posibles factorizaciones de  $f(x) - 3x^7$  en  $\mathbb{C}[x]$ .