

Práctica 6

Singularidades y residuos

1. Sea $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de f en cada uno de los siguientes anillos:
- $0 < |z| < 1$
 - $1 < |z| < 2$
 - $|z| > 2$
 - $1 < |z-2| < 2$
2. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de las siguientes funciones en las regiones indicadas:
- $\frac{1}{z(z-1)^2}$ en $0 < |z-1| < 1$ y en $|z-1| > 1$
 - $\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)^2}$ en $0 < |z+3| < 1$ y en $2 < |z| < 3$.
3. a) Decidir dónde convergen las series de Laurent de las siguientes funciones alrededor de z_0 :
- $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ ($z_0 = 0$)
 - $f(z) = e^z + \frac{z^2+1}{z^2-2z+1}$ ($z_0 = 1$)
- b) ¿Cuánto vale el coeficiente de z en el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$ en la región $|z| > 1$?
4. Si f tiene una singularidad no evitable en $z = i$ y en $z = 2i$, probar que el desarrollo en serie de Laurent de f en la corona $1 < |z| < 2$ tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos no nulos.
5. Probar que en todo disco perforado $0 < |z| < \epsilon$ la función $e^{\frac{1}{z}}$ toma todos los valores complejos salvo el cero.
6. Sea $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$. Mostrar que f tiene una singularidad esencial en $z = 0$ y explicar por qué este hecho muestra que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

es una función que, si bien es indefinidamente derivable en \mathbb{R} , no coincide con su serie de Taylor en ningún entorno de cero.

7. Cada una de las siguientes funciones tiene una singularidad aislada en $z = 0$. Determinar su naturaleza. Si es evitable, definir $f(0)$ de modo que resulte holomorfa en $z = 0$. Si es un polo, hallar la parte singular.

a) $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z - 1)}$

b) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z}$

c) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

d) $f(z) = \frac{\log(z + 1)}{z}$

e) $f(z) = \frac{1}{z} \cos\left(\frac{1}{z}\right)$

f) $f(z) = \frac{1}{1 - e^z}$

g) $\operatorname{sen} z \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$

8. Hallar y clasificar las singularidades en \mathbb{C} de las siguientes funciones:

a) $f(z) = \frac{1 + z^2}{z(z - 1)^2}$

b) $f(z) = \frac{1}{z^3} \operatorname{sen} z$

e) $f(z) = \frac{\cos z}{z + 1}$

f) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$

g) $f(z) = \cos\left(\frac{\pi}{z - \pi}\right)$

h) $-\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z^2 + 1}\right)}$

i) $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z + 1)z}$

9. a) Mostrar que $f(z) = \operatorname{tg} z$ es meromorfa en \mathbb{C} .
 b) Hallar sus polos y el orden de los mismos.
 c) Determinar la parte singular de f en cada polo.
10. Sea $f(z) = \frac{a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0}$. Probar
 a) ∞ es a lo sumo una singularidad aislada de f .
 b) si $m \leq n$, f es holomorfa en ∞ . ¿Cuánto vale f en el punto en el infinito?
 c) si $m > n$, ∞ es un polo de f . Hallar su orden.

11. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones en \mathbb{C}_∞ :

a) $\frac{e^z - 1 - z}{z^2}$

b) $\frac{\cos z - 1}{z^6 + z^4}$

c) $\frac{\cos z - 1}{(z - 2\pi)^2} + \frac{z - 3}{(z + 1)^2(z - 2)}$

d) $e^{\frac{z}{1-z}}$

e) $\frac{e^{z^2 + \frac{1}{z^2}} - 1}{z^2 - 1}$

12. a) Hallar una función f no holomorfa en 0 y tal que $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$.
 b) Mostrar que una función puede ser holomorfa en ∞ y tener residuo no nulo allí.

- c) Probar que si f tiene una singularidad esencial en $z = a$, $\frac{1}{f}$ tiene una singularidad esencial, o no aislada, en $z = a$.
- d) Mostrar que si ∞ es un cero de f de orden mayor que 1, entonces $\text{Res}(f, \infty) = 0$.
- e) Mostrar que si ∞ es un cero simple de f , entonces $\text{Res}(f, \infty) = -\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$.
13. Probar:
- a) Si a es un polo de orden m de f y definimos $g(z) = (z - a)^m f(z)$, entonces $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$.
- b) Si a es un polo simple de f , entonces $\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z)$.
14. Sea f una función meromorfa en un abierto conexo G . Probar:
- a) Si f tiene un polo de orden m en $a \in G$, su derivada logarítmica tiene en él un polo simple, siendo $\text{Res}(f'/f, a) = -m$.
- b) Si f tiene un cero de orden m en $b \in G$, su derivada logarítmica tiene en él un polo simple, siendo $\text{Res}(f'/f, b) = m$.
- c) Si f tiene un polo simple en a y g es holomorfa en a entonces $\text{Res}(fg, a) = \text{Res}(f, a) \cdot g(a)$.
15. Calcular los residuos de las funciones del ejercicio 8, en cada una de sus singularidades aisladas.
16. a) Clasificar en \mathbb{C}_∞ las singularidades de:
- i) $\frac{\text{sen}(\frac{z}{z+3})}{(z+2 - \frac{i}{4\pi})(1 - e^{1/(z+2)})}$ ii) $e^{az}(1 + e^z)^{-1} \quad (a \in \mathbb{C})$
- b) Calcular el residuo en infinito de:
- i) $\frac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ ii) $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)z}$
17. Hallar los residuos en \mathbb{C}_∞ de las funciones del ejercicio 11, en cada una de sus singularidades aisladas.
18. Sea \mathcal{C} la circunferencia $|z| = 2$, recorrida una vez en sentido positivo. Calcular:
- a) $\int_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^4 + 1} dz$
- b) $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z+1)^4(z^2-9)(z-4)}$
- c) $\int_{\gamma} \frac{dz}{\text{sen } z^2} \quad \gamma : |z| = \frac{\pi}{2} \text{ en sentido negativo.}$

19. Sea $G = \mathbb{C} - [-1, 1]$. Se define en G la función $f(z) = z^2 \log \left(\frac{z+1}{z-1} \right)$.

a) Calcular $\text{Res}(f, \infty)$.

b) Utilizando el método de los residuos, calcular:

$$\int_C f(z) dz \quad \text{siendo } C : |z| = 2$$

20. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}_\infty - \{-1, 2\}$ tal que -1 es un polo simple y 2 un polo doble. Se sabe además que:

$$- \text{Res}(f, -1) = 1 \quad \text{y} \quad \text{Res}(f, 2) = 2.$$

$$- f(0) = \frac{7}{4} \quad \text{y} \quad f(1) = \frac{5}{2}.$$

Determinar f , y calcular su desarrollo en serie de Laurent en potencias de z y su residuo en ∞ .