Práctica 5
Integrales complejas y fórmulas de Cauchy

---

1. Calcular

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{it}dt$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-zt}dt \quad (\mathrm{Re}(z) > 0)$ **c)** $\displaystyle\int_1^2 \log(it)dt$

2. **a)** Sean γ, σ las poligonales de vértices $\{1, i\}$ y $\{1, 1+i, i\}$ respectivamente. Hallar una parametrización de γ y de σ y calcular $\displaystyle\int_\gamma f$ y $\displaystyle\int_\sigma f$, donde $f(z) = |z|^2$.

   b) Deducir que en el plano complejo deja de ser cierto que toda función continua tiene primitiva.

3. Calcular: $\displaystyle\int_\gamma 3zdz$ y $\displaystyle\int_\gamma 3|z|dz$, para

   a) γ : segmento que une -1 con 1.

   b) γ : $|z| = 1$ de -1 a 1, recorrido en el sentido horario.

   c) γ : $|z| = 1$ de -1 a 1, recorrido en el sentido antihorario.

   d) γ : poligonal de vértices -1 , i , 1.

4. Calcular

   a) $\displaystyle\int_C e^z dz,$ si $C : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, recorrida una vez en sentido horario.

   b) $\displaystyle\int_0^1 xdz,$ uniendo ambos puntos con un segmento y luego con la poligonal de vértices: 0 , i , 1.

   c) $\displaystyle\int_{|z-a|=r} (z-a)^m dz$ para cada $m \in \mathbb{Z}$, recorriendo la curva una vez en sentido horario.

5. Sea γ el polígono cerrado de vértices: $1 - i$, $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$, $1 - i$.

   Hallar $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$.

6. Sean $D \subset \mathbb{C}$ abierto, $\gamma : [a, b] \to D$ diferenciable a trozos y $f : D \to \mathbb{C}$ continua. Se define:

$$\int_\gamma f|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

a) ¿Qué se obtiene cuando $f \equiv 1$?

b) Calcular $\int_\gamma |dz|$ para $\gamma : |z-a| = r$.

c) Probar que $\left|\int_\gamma f dz\right| \leq \int_\gamma |f||dz|$ y deducir que si $|f(z)| \leq M$ y $\ell = \mathrm{long}(\gamma)$, entonces $\left|\int_\gamma f dz\right| \leq M\ell$.

7. Calcular

a) $\int_\gamma x dz$, $\gamma :$ segmento de 0 a $1+i$

b) $\int_{|z|=1} |z-1|\,|dz|$

c) $\int_{C_i} z^n\, dz \quad (a \in \mathbb{R}_{>0}, n \in \mathbb{N})$

$$C_1 : z(t) = ae^{it},\ 0 \leq t \leq \pi; \qquad\qquad C_2 : z(t) = ae^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

d) $\int_{C_i} \frac{dz}{z-2} \qquad C_1 : |z-2| = 4; \quad C_2 : |z-1| = 5$

e) $\int_\gamma (x^2 + iy^2)|dz| \qquad \gamma : |z| = 2$

f) $\int_{|z-1|=1} \bar{z}^2\, dz$

8. Hallar $\int_\gamma z^{-\frac{1}{2}} dz$, donde:

a) $\gamma : |z| = 1$, $\mathrm{Im}(z) \geq 0$, de 1 a -1.

b) $\gamma : |z| = 1$, $\mathrm{Im}(z) \leq 0$, de 1 a -1.

9. Sea $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Hallar

a) $\int_\gamma (z^2-1)^{-1} dz$.

b) Idem para $\gamma(t) = 2e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$.

10. Sea f holomorfa en un abierto conexo Ω tal que $|f(z)-1| < 1$ en Ω. Mostrar que $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$ para cualquier curva cerrada γ contenida en Ω.

Nota: f' es continua.

11. Sean $f : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ la rama principal del logaritmo y $g : \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ la rama del logaritmo que verifica $g(1) = 2\pi i$.

    Comparar $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$ y $\displaystyle\int_\gamma g(z)\, dz$, siendo $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} - \mathbb{R}_{\leq 0}$ una curva que une 1 con i.

12. Determinar el dominio de holomorfía de la función f y aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para demostrar que $\displaystyle\int_C f(z)dz = 0$ cuando $C : |z| = 1$, siendo:

    a) $f(z) = ze^{-z}$ **b)** $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 2}$

13. Calcular

    a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\, dz, \quad \gamma(t) = e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$

    b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}\, dz, \quad \gamma(t) = e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$

    c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\, dz, \quad \gamma(t) = e^{it}\ ,\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ n \in \mathbb{N}$

    d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z - \frac{1}{2})^n}, \quad \gamma(t) = \tfrac{1}{2} + e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ n \in \mathbb{N}$

    e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log z}{z^n}\, dz,\ \gamma(t) = 1 + \tfrac{1}{2}e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ n \geq 0.$

    f) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4)} dz, \quad \gamma(t) = re^{it}\ ,\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ r \in \mathbb{R}_{>0} - \{2\}.$

14. **Desigualdades de Cauchy**

    a) Sea f holomorfa en $B(a, R)$ y tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in B(a, R)$. Probar que en tal caso:
    $$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}$$

    b) Mostrar que las derivadas sucesivas de una función holomorfa en un punto z no pueden satisfacer:
    $$|f^{(n)}(z)| > n! \cdot n^n$$

15. Sea f entera y tal que $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathbb{R}_{>0}$. Probar que f es un polinomio.

    Deducir que si f es una función entera tal que para algún $k \geq 0$, $\displaystyle\lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{f(z)}{z^k} \right| = 0$, entonces f es un polinomio de grado menor que k (si $k > 0$) o $f \equiv 0$ (si $k = 0$).

    Deducir además que si f es entera y acotada entonces f es constante.

16. Hallar todas las f holomorfas en $|z| \leq 1$ tales que $|f(z)| \leq \sqrt{5}$ cuando $|z| = 1$ y $f(\frac{1}{3}) = 2 + i$.

17. ¿Existe f holomorfa en $|z| < 1$ tal que $f(\frac{1}{2n}) = \frac{(-1)^n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

18. Encontrar los desarrollos en serie de Taylor alrededor del punto a , para:

    a) $\dfrac{e^z - 1}{z}$, $a = 0$

    b) ze^z, $a = -1$

    c) $(z+1)^{-1}$, $a = 1$

    d) $\dfrac{1-z}{(z+1)^3}$, $a = 0$

19. Desarrollar la función $f(z) = z^{-1}$ en serie de potencias de $z+1-i$. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie hallada?

20. Probar que si la serie $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ es convergente en $|z - z_0| < r$, entonces la serie $F(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ es convergente en este disco y su suma es una primitiva de f. ¿Prueba esto que toda función holomorfa en un abierto Ω admite primitiva en todo Ω?

21. **a)** Calcular, sin efectuar el desarrollo, el radio de convergencia de las series de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados

    (i) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}(1 + iz)}$ en $z = 0$

    (ii) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$ en $z = \frac{3}{2} - i$

    b) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. ¿Se puede encontrar siempre una serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $z_0 \in \Omega$, tal que $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ en Ω ?

22. **a)** Sea $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tal que restringida a $\mathbb{R}$ tiene radio de convergencia ∞. Probar que f es entera.

    b) Dar una interpretación del hecho que la función real $\dfrac{1}{1+x^2}$ es indefinidamente derivable en $\mathbb{R}$ pero no es desarrollable en serie de potencias de radio ∞.