Geometría Proyectiva
Segundo Cuatrimestre — 2022

Práctica 6: Curvas algebraicas afines

1. Grafique las curvas en $\mathbb{R}^2$ dadas por la ecuación $f(X,Y)=0$:

(a) $f = Y - X^2$
(b) $f = Y - X^3 + X$
(c) $f = Y^2 - X^3$
(d) $f = Y^2 - X^3 - X^2$
(e) $f = (X^2+Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$
(f) $f = (X^2+Y^2)^3 - 4X^2Y^2$
(g) $f = X^2 + X^3 + Y^2$
(h) $f = 2X^4 - 3X^2Y + Y^2 - 2Y^3 + Y^4$
(i) $f = X^4 + X^2Y^2 - 2X^2Y - XY^2 + Y^2$
(j) $f = X^6 - X^2Y^3 - Y^5$

2. Pruebe que las curvas planas definidas por los siguientes polinomios tienen a $p=(0,0)$ como único punto singular.

(a) $Y^2 - X^3$
(b) $Y^2 - X^3 - X^2$
(c) $(X^2+Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3$
(d) $(X^2+Y^2)^3 - 4X^2Y^2$

3. Encuentre los puntos singulares y las rectas tangentes en ellos de cada una de las siguientes curvas:

(a) $Y^3 - Y^2 + X^3 - X^2 + 3Y^2X + 3X^2Y + 2XY$
(b) $X^4 + Y^4 - X^2Y^2$
(c) $X^3 + Y^3 - 3X^2 - 3Y^2 + 3XY + 1$
(d) $Y^2 + (X^2-5)(4X^4 - 20X^2 + 25)$

4. Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado, sea $f \in K[x,y]$ y sea p un punto singular de la curva afín $C(f)$ definida por f. Decimos que p es un *nodo* si f tiene multiplicidad dos en p y su forma inicial es producto de dos factores lineales distintos. Pruebe que p es un nodo si y sólo si tiene multiplicidad al menos dos en $C(f)$ y $f_{xy}^2(p) \neq f_{xx}(p)f_{yy}(p)$.

5. La curva en $\mathbb{R}^2$ definida en coordenadas polares por

$$r = 4a\cos^3 \tfrac{1}{3}\theta, \quad -\tfrac{3}{2}\pi \leq \theta \leq \tfrac{3}{2}\pi$$

es una séxtica de ecuación

$$4(x^2+y^2-ax)^3 = 27a^2(x^2+y^2)^2.$$

Esta curva es conocida como la *séxtica de Cayley*.

6. Sea $\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ definida por

$$\lambda(t) = (a\sin(nt+d), b\sin(t))$$

denominada "curva de Lissajous" (en versión compleja) con parámetros a,b,n,d.

(a) Haga gráficos de la imagen de λ (restringida a los reales) para varios valores de los parámetros (reales). Sugerencia: Se puede utilizar computadora, para visualizar las diversas formas que se obtienen variando los parámetros.

(b) (opcional) Demostrar que si n es racional entonces el conjunto imagen de λ es una curva algebraica. Sugerencia: Algunos cálculos se pueden facilitar utilizando la función exponencial compleja.

7. Exhibir para cada $d > 0$ un polinomio irreducible $f_d \in K[X, Y]$ de grado d. Exhibir también un polinomio irreducible no-singular de grado d. Sugerencia: Usar el criterio de Eisenstein.

8. Probar que $F = Y^2 + X^2(X-1)^2 \in \mathbb{R}[X, Y]$ es un polinomio irreducible, pero que $V(F)$ es reducible. Qué pasa con el mismo polinomio sobre $\mathbb{C}$?

9. Si una curva de grado d tiene un punto p de multiplicidad d, probar que la curva es la unión de d rectas que pasan por p (no necesariamente distintas).

10. Sea $T : k^2 \to k^2$ una *aplicación polinómica*, esto es, una función $k^2 \to k^2$ tal que existen T_1, $T_2 \in k[X, Y]$ con $T(x, y) = (T_1(x, y), T_2(x, y))$ para todo $(x, y) \in k^2$. Si $f \in k[X, Y]$, definimos $f^T \in k[X, Y]$ poniendo
$$f^T(X, Y) = f(T_1(X, Y), T_2(X, Y)).$$
Denotamos por $m_p(f)$ la multiplicidad de f en $p \in k^2$.

(a) Sea $q \in k^2$ y $p = T(q)$. Si el jacobiano de T en q es inversible, entonces $m_q(f^T) = m_p(f)$.

(b) La implicación recíproca es falsa. Para verlo, considere la función $T(X, Y) = (X^2, Y)$, el polinomio $f = Y - X^2$ y $p = q = (0, 0)$.

11. Calcule las direcciones asintóticas y las asíntotas de las curvas algebraicas definidas por los siguientes polinomios:

(a) $X^2 - Y^2 - 1$
(b) $X^2 + Y^2 - 1$
(c) $Y - X^2$
(d) $Y^2 - X^2 + X^3$
(e) $Y^2 - X^3 + X$
(f) $X^n + Y^n - 1$
(g) $X^n - Y^m$
(h) $Y^2 - f(X)$, con $f \in k[X]$ de grado n.

12. (a) Si $f_r, f_{r+1} \in k[x_1, \ldots, x_n]$ son dos polinomios homogéneos de grados r y $r + 1$, respectivamente, y sin factores comunes, entonces $f = f_r + f_{r+1}$ es irreducible.

(b) Dadas rectas $L_1, \ldots, L_m$ en k^2 que pasan por el origen, y enteros no negativos $r_1, \ldots, r_m$, existen curvas irreducibles que tienen a cada L_i como recta tangente de multiplicidad r_i. Sugerencia: Si para cada $i = 1, \ldots, m$, f_i es una ecuación de la recta L_i, considerar $f = f_r + f_{r+1}$ donde $f_r = \prod_{i=1}^{m} f_i^{r_i}$ y f_{r+1} es apropiado.

13. Sea k un cuerpo y d un número natural. Denotamos
$$k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq d} = \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] / (f) \leq d\} \cup \{0\}$$
el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a d, incluyendo el polinomio nulo. Asimismo denotamos
$$k[X_1, \ldots, X_n]_d$$
el conjunto de los polinomios homogéneos de grado d.

(a) $k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq d}$ y $k[X_1, \ldots, X_n]_d$ son subespacios vectoriales de $k[X_1, \ldots, X_n]$. El conjunto de los monomios que tienen grado a lo sumo d es una base de $k[X_1, \ldots, X_n]_{\leq d}$, y el conjunto de los monomios de grado d es una base de $k[X_1, \ldots, X_n]_d$.

(b) Mostrar que

$$\dim k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d} = \binom{n+d}{d} \quad \text{y} \quad \dim k[X_0, \dots, X_n]_d = \binom{n+d}{d}.$$

14. Si $f \neq 0$ en $k[X_1, \dots, X_n]$, entonces

$$f \in k[X_1, \dots, X_n]_d \iff f(tX_1, \cdots, tX_n) = t^d f(X_1, \cdots, X_n).$$

A la derecha, la igualdad es entre elementos de $k[t, X_1, \cdots, X_n]$.

15. Si $F \in k[X_1, \dots, X_n]_d$, entonces vale la "fórmula de Euler",

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial F}{\partial X_i} = dF.$$

16. (a) Si F, $G \in k[X_1, \dots, X_n]$ son polinomios homogéneos de grados r y s, respectivamente, entonces FG es homogéneo de grado $r + s$.

(b) Todo factor de un polinomio homogéneo es homogéneo.

17. *Homogeneización y deshomogeneización de polinomios.*
Si $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$, sea $F_* \in k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d}$ el polinomio

$$F_*(X_1, \dots, X_n) = F(1, X_1, \dots, X_n)$$

Si $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ es un polinomio de grado d, sea $f^* \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ dado por

$$f^*(X_0, \dots, X_n) = X_0^d f\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big).$$

(a) Si $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ y $f \in k[X_1, \dots, X_n]$, encuentre expresiones explícitas para los coeficientes de F_* y de f^*.

(b) Si $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ y $G \in k[X_0, \dots, X_n]_e$, y f, $g \in k[X_1, \dots, X_n]$, entonces $(FG)_* = F_* G_*$ y $(fg)^* = f^* g^*$.

(c) Si $f \in k[X_1, \dots, X_n]$, entonces $(f^*)_* = f$.

(d) Si $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ y r es la mayor potencia de X_0 que divide a F, entonces $X_0^r (F_*)^* = F$.

(e) Si F, $G \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ y f, $g \in k[X_1, \dots, X_n]$, entonces vale que $(F+G)_* = F_* + G_*$ y $X_0^t (f+g)^* = X_0^e f^* + X_0^d g^*$, con $d = f$, $e = g$ y $t = d + e - (f + g)$.

18. Sea $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ un polinomio no divisible por X_0 y sea $f = F_*$, como en el ejercicio anterior.

(a) Los polinomios f y F tienen el mismo grado.

(b) Todo divisor no nulo de F es homogéneo.

(c) Hay una correspondencia biyectiva entre los divisores de F y los de f. En particular, F es irreducible si y sólo si f lo es.

19. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Si $F \in k[X, Y]_d$, entonces existen a_1, …, a_d, b_1, …, $b_d \in k$ tales que $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$ para todo i y

$$F(X, Y) = \prod_{i=1}^{d} (a_i X + b_i Y).$$

20. Si k es un cuerpo infinito, entonces un polinomio $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ tal que $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ para todo $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ es nulo. Dar contraejemplos si k es finito.

21. Sean n, m dos números naturales, sea A un dominio de integridad y sean $f, g \in A[X]$ dos polinomios de grados $\leq n$ y $\leq m$ respectivamente, digamos

$$f = f_0 + f_1 X + \cdots + f_n X^n, \quad g = g_0 + g_1 X + \cdots + g_m X^m.$$

La *resultante* de f y g es el determinante

$$R_{n,m}(f,g) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & \cdots & \cdots & f_n & & & \\ & f_0 & f_1 & \cdots & \cdots & \cdots & f_n & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & f_0 & f_1 & \cdots & \cdots & \cdots & f_n \\ g_0 & g_1 & \cdots & \cdots & g_m & & & & \\ & g_0 & g_1 & \cdots & \cdots & g_m & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & g_0 & g_1 & \cdots & \cdots & g_m \end{vmatrix};$$

Notemos que se trata de una matrix $(m+n)\times(m+n)$ (matriz de Sylvester). Supongamos que A es un DFU y que $f_n \neq 0$ y $g_m \neq 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) f y g tienen un factor común de grado positivo.

(b) Existen polinomios no nulos ϕ, $\psi \in A[X]$, de grados menores que n y que m, respectivamente, tales que $\psi f = \phi g$.

(c) $R_{n,m}(f,g) = 0$.

Observación: Si $f_n = g_m = 0$ entonces $R_{n,m}(f,g) = 0$.

22. Sea A un dominio de integridad. Si f, $g \in A[X]$, entonces existen p, $q \in A[X]$ tales que $R(f,g) = pf + qg$.

23. Sea k un cuerpo. Podemos pensar a los elementos de $k[X,Y] = k[X][Y]$ como elementos de $A[Y]$ con $A = k[X]$. Si f, $g \in k[X,Y]$, podemos entonces calcular la resultante de f y g *como polinomios en Y*: la notamos $R_Y(f,g) \in k[X]$.

Enuncie los resultados del ejercicio **21** en este caso especial. En particular, pruebe que si k es algebraicamente cerrado y $a \in k$, entonces

$$R_Y(f,g)(a) = 0 \iff \exists b \in k : f(a,b) = g(a,b) = 0.$$

Generalice esto a la situación en que f, $g \in k[X_1,\dots,X_n] = k[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]$.

24. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y sean $f, g \in k[X_1,\cdots,X_n]$. Supongamos que f es irreducible.

(a) Se tiene que $C(f) \subseteq C(g)$ si y solamente si f divide a g.

(b) Si g también es irreducible y $C(f) = C(g)$, entonces $f = ug$ con $u \in k^\times$.

(c) Exhiba un contraejemplo de la última afirmación cuando el cuerpo de base no es algebraicamente cerrado.

25. Sean F, $G \in k[X_0,X_1,\dots,X_n] = k[X_1,\dots,X_n][X_0]$ dos polinomios homogéneos de grados d y e, respectivamente. Si

$$R = R_{X_0}(F,G)$$

es la resultante de F y G con respecto de X_0, entonces R es un elemento de $k[X_1,\dots,X_n]$ homogéneo de grado de.

26. Si f, $g \in k[X]$ son polinomios mónicos con coeficientes en un cuerpo k, con factorizaciones $f = \prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)$ y $g = \prod_{j=i}^m (x-\beta_j)$ en $k[X]$, entonces

$$R(f,g) = u \prod_{1\leq i,j\leq n} (\alpha_i - \beta_j)$$

para algún $u \in k^\times$ que depende solamente de n y de m.

27. Sea A un dominio de integridad y sean f, $g \in A[X]$ dos polinomios mónicos. Sea $\varphi : A[X]/(g) \to A[X]/(g)$ el homomorfismo de A-módulos tal que $\varphi(\overline{h}) = \overline{fh}$ para todo $h \in A[X]$. Muestre que $\operatorname{det}(\varphi) = R(f,g)$. Observe que como el A-módulo $A[X]/(g)$ es *libre*, esto tiene sentido.

28. Sea C una curva algebraica afín plana de grado d. Si L es una recta en k^2 que no está contenida en C, entonces el conjunto $L \cap C$ es finito y tiene a lo sumo d puntos.

29. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ un polinomio no constante. El conjunto $k^n \setminus C(f)$ es infinito si $n \geq 1$ y $C(f)$ es infinito si $n \geq 2$.

30. (a) Una curva plana irreducible posee un número finito de puntos singulares.
(b) ¿Es esto cierto para hipersuperficies en k^n, $n \geq 3$?

31. Considere las curvas algebraicas en k^2 definidas por los siguientes polinomios:
$f_1 = y - x^2$;
$f_2 = y^2 - x^3 + x$;
$f_3 = y^2 - x^3$;
$f_4 = y^2 - x^3 - x^2$;
$f_5 = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3$;
$f_6 = (x^2 + y^2)^3 - x^2y^2$. Si $P = (0, 0)$, calcule $I(P, f_i \cap f_j)$ para cada $i < j$.

32. Un punto simple P de una curva f es una *inflexión* si $I(P, f \cap L) \geq 3$, con L la recta tangente a f en P. Decimos que la inflexión es *ordinaria* si $I(P, f \cap L) = 3$ y que es *de orden superior* en otro caso.

(a) Para qué valores de n posee la curva $y - x^n = 0$ una inflexión en $P = (0, 0)$ y de qué tipo es?
(b) Si $f = y + ax^2 + \ldots$, muestre que $(0, 0)$ es un punto de inflexión si y sólo si $a = 0$.

Dé un criterio sencillo que sirva para calcular $I(P, f \cap L)$, y por lo tanto para determinar si $(0, 0)$ es una inflexión de orden superior.

33. Supongamos que P es un punto doble de una curva C de ecuación $f = 0$ y que C posee solo una tangente L en P.

(a) Muestre que $I(P, f \cap L) \geq 3$. Decimos que C tiene una *cúspide* en P cuando $I(P, f \cap L) = 3$.
(b) Si $P = (0, 0)$ y L tiene ecuación $y = 0$, entonces P es una cúspide si y sólo si $f_{xxx}(P) \neq 0$. Dé ejemplos.
(c) Si P es una cúspide de C, entonces hay una única componente de C que pasa por P.

34. Sea $f \in k[x, y]$ un polinomio de grado n y sea $N \leq n$ el grado de f con respecto a la variable y, de modo que $f = \sum_{i=0}^{N} a_i(x)y^i$ con $a_i \in k[x]$ con $a_N \neq 0$. Determine qué implicaciones son verdaderas entre las siguientes proposiciones:

(a) $N < n$;
(b) $f_n(0, 1) = 0$, es decir, la dirección $(u, v) = (0, 1)$ es asintótica para f;
(c) f no contiene el monomio y^n;
(d) f tiene una recta asintótica vertical;
(e) a_N no es constante.

35. (Lema de Normalización de Noether) Sea $f \in k[x, y]$ de grado n. Existe una matriz inversible $A \in M_2(k)$ tal que $g(x, y) = f((x, y) \cdot A)$ contiene el monomio y^n.

36. Sean (r, s) un par ordenado de números naturales y sea $f_{rs} = x^r - y^s \in k[x, y]$.

(a) Demostrar que si r, s son coprimos entonces f_{rs} es irreducible en $k[x, y]$ y en $k[[x, y]]$.
(b) Determinar los factores irreducibles de f_{rs} si r, s no son coprimos.
(c) Calcular $I((0, 0), f_{rs} \cap f_{r's'})$ para $r, s, r', s' \in \mathbb{N}$.