Geometría Proyectiva
Segundo Cuatrimestre — 2022

Práctica 8: Curvas algebraicas proyectivas

1. Sean $H_1, \dots, H_m$ hiperplanos de $\mathbb{P}^n$, $m \leq n$. Probar que $H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_m \neq \emptyset$.

2. Sean P_1, P_2, P_3 (respectivamente Q_1, Q_2, Q_3) tres puntos de $\mathbb{P}^2$ no alineados. Probar que existe un isomorfismo proyectivo $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que $T(P_i) = Q_i$ para $i = 1, 2, 3$.

3. Sean L_1, L_2, L_3 (respectivamente M_1, M_2, M_3) rectas de $\mathbb{P}^2$ no concurrentes. Probar que existe un isomorfismo proyectivo $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que $T(L_i) = M_i$.

4. Clasificación proyectiva de cuádricas. Un conjunto $Q \subset \mathbb{P}^n(k)$ se llama *cuádrica* si $Q = C(F)$ con $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogéneo de grado 2. Sea $Q = C(F) \subset \mathbb{P}^n(k)$ una cuádrica.

(a) Supongamos que $2 \neq 0$ en k. Probar que existe un isomorfismo proyectivo T tal que $Q^T = C(G)$ con G de la forma $G = \sum_{i=0}^n a_i X_i^2$, $a_i \in k$. (Sugerencia: completar cuadrados.)

(b) Si $k = \mathbb{R}$, existe un isomorfismo proyectivo T tal que $Q^T = C(G_{r,p})$, con $G_{r,p}$ de la forma

$$G_{r,p} = \sum_{i=0}^{p} X_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} X_i^2, \qquad 0 \leq p \leq r \leq n, \quad r \leq 2p+1.$$

Probar además que el par (r, p) no depende de la elección de T.

(c) Si $k = \mathbb{C}$, existe un isomorfismo proyectivo T tal que $Q^T = C(G_r)$, con G_r de la forma

$$G_r = \sum_{i=0}^{r} X_i^2, \qquad 0 \leq r \leq n,$$

donde r no depende de la elección de T.

5. Sea $F \in k[X, Y, Z]_d$ un polinomio homogéneo de grado d. Probar que $P \in \mathbb{P}^2$ es un punto singular de la curva proyectiva $C(F)$ si y sólo si $F_X(P) = F_Y(P) = F_Z(P) = 0$.

6. Sea P un punto no-singular de F. Probar que la recta tangente a F en P es

$$F_X(P)X + F_Y(P)Y + F_Z(P)Z = 0.$$

7. Probar que las siguientes curvas son irreducibles; buscar sus puntos singulares, las multiplicidades y las tangentes en los puntos singulares.

(a) $XY^4 + YZ^4 + XZ^4$

(b) $X^2Y^3 + X^2Z^3 + Y^2Z^3$

(c) $Y^2Z - X(X - Z)(Z - \lambda Z)$, $\lambda \in k$

(d) $X^n + Y^n + Z^n$, $n > 0$.

8. Estudie las singularidades en los puntos $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ y $(0 : 0 : 1)$ de la curva proyectiva de ecuación

$$x^2y^5 - x^5y^2 - 2xy^5z + x^5z^2 + y^5z^2 - x^3yz^3 + 2\alpha x^2y^2z^3 - xy^3z^3 = 0$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$.

9. Si $\alpha \neq 2, 3, 6$ entonces la curva proyectiva

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 + x^2y + y^2z + z^2x + \alpha xyz$$

es no singular.

10. Para cada $n > 0$ hay curvas en el plano proyectivo complejo no singulares y de grado n.

11. Buscar todos los puntos de intersección de los siguientes pares de curvas, y los correspondientes números de intersección. Verificar la validez del Teorema de Bezout.

(a) $Y^2Z - X(X-2Z)(X+Z)$ y $Y^2 + X^2 - 2XZ$
(b) $(X^2+Y^2)Z + X^3 + Y^3$ y $X^3 + Y^3 - 2XYZ$
(c) $Y^5 - X(Y^2 - XZ)^2$ y $Y^4 + Y^3Z - X^2Z^2$
(d) $(X^2+Y^2)^2 + 3X^2YZ - Y^3Z$ y $(X^2+Y^2)^3 - 4X^2Y^2Z^2$

12. Sea $C(f) \subset k^2$ la curva afín definida por $f \in k[x,y]$. Sea $F = f^* \in k[X,Y,Z]$ la homogeneización de f y $C^* = C(F) \subset \mathbb{P}^2(k)$ la clausura proyectiva de $C(f)$. Verificar que las rectas asintóticas de $C(f)$ corresponden a las rectas tangentes de $C(F)$ en los puntos de la recta del infinito $Z = 0$. Tratar primero el caso en que dichos puntos de $C(F)$ son no-singulares.

13. Sea $g \in \mathbb{C}[x]$ de grado n y $f = y - g(x) \in \mathbb{C}[x,y]$, y sea $C = C(f) \subset \mathbb{C}^2$ la curva afín definida por f.

(a) Si $H_a = (y - a = 0)$ es una recta horizontal, el número total de intersecciones (contadas con multiplicidad) de C con H_a es igual a n.
(b) Si $V_a = (x - a = 0)$ es una recta vertical, el numero total de intersecciones $C \cap V_a$ es igual a 1. Cómo se concilia esto con el teorema de Bezout ?

14. Sea F una cúbica irreducible, $P = (0:0:1)$ una cúspide de F, $Y = 0$ la recta tangente a F en P. Probar que $F = aY^2Z - bX^3 - cX^2Y - dXY^2 - eY^3$. Buscar un isomorfismo proyectivo T tal que

(a) $F^T = Y^2Z - X^3 - cX^2Y - dXY^2 - eY^3$
(b) $F^T = Y^2Z - X^3 - dXY^2 - eY^3$ (cambiar X por $X - c/3Y$)
(c) $F^T = Y^2Z - X^3$ (cambiar Z por $Z + dX + eY$)

Por lo tanto, salvo equivalencia proyectiva, existe una sola cúbica con una cúspide. Verificar que no tiene otras singularidades.

15. Probar que salvo equivalencia proyectiva existe una sola cúbica irreducible con un nodo: $XYZ - X^3 - Y^3$. Verificar que no tiene otras singularidades.

16. Probar que una cúbica irreducible es no singular o bien posee, a lo sumo, un punto doble (un nodo o una cúspide).

17. Si $m \in \mathbb{C}$, sea C_m la cúbica en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3mxyz = 0.$$

(a) La curva C_m es singular sii $m^3 + 1 = 0$.
(b) Cuando C_m es singular, se descompone como unión de tres rectas.
(c) Si α y β son las raíces de $t^3 + 1$ distintas de -1, los puntos de inflexión de C_m son $(0:1:-1)$, $(-1:0:1)$, $(1:-1:0)$, $(0:1:\alpha)$, $(\alpha:0:1)$, $(1:\alpha:0)$, $(0:1:\beta)$, $(\beta:0:1)$ y $(1:\beta:0)$.

18. Sea $F \in k[X_0,X_1,X_2]_n$ sin factores lineales (p. ej. irreducible). Consideremos la matriz $h(F)$ cuya coordenada (i,j) es la derivada segunda $F_{X_iX_j}$ (matriz Hessiana de F) y sea $H(F)$ el determinante de $h(F)$. Notar que $H(F) \in k[X_0,X_1,X_2]_{3(n-2)}$. Supongamos que la característica de k es cero. Demostrar: $P \in C(H) \cap C(F)$ si y sólo si P es una inflexión o un punto singular de F. (En caso de necesidad, ver Walker). En particular, si F es no singular, las inflexiones de la curva $C(F)$ son las intersecciones de $C(F)$ con su curva Hessiana $C(H(F))$.

19. Sea $P \in F$ un punto no singular, sea T la recta tangente a F en P y sea $H = H(F)$ la Hessiana de F. Demostrar que $I(P, F \cap H) = I(P, F \cap T) - 2$. En particular, $I(P, F \cap T) = 3$ (P es inflexión simple) si y sólo si $I(P, F \cap H) = 1$ (F y H se intersecan transversalmente en P). Usando Bezout, deducir que si F es no-singular, el número de puntos de inflexión de $C(F)$, contados con multiplicidad, es $3(n-2)n$.

20. Sea $a = (0 : 1 : 0)$ una inflexión de una cúbica irreducible F, $Z = 0$ la recta tangente a F en $(0 : 1 : 0)$. Probar que $F = ZY^2 + bYZ^2 + cXYZ + G(X, Z)$. Buscar un isomorfismo proyectivo T tal que $F^T = ZY^2 - C(X, Z)$ donde C es una forma de grado 3. (Sugerencia: Cambiar Y por $Y - b/2Z - c/2X$.)

21. Probar que toda cúbica irreducible es proyectivamente equivalente a una de las siguientes:

(a) $Y^2Z - X^3$

(b) $Y^2Z - X^2(X + Z)$

(c) $Y^2Z - X(X - Z)(X - \lambda Z)$ con $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0, 1$.

22. (a) Probar que existen dos puntos $p_1, p_2 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tales que toda circunferencia en el abierto afín $\mathbb{A}^2(\mathbb{C}) = \{z \neq 0\}$ pasa por ellos.

(b) Más aún, si $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2$ es una cónica tal que $p_1, p_2 \in \overline{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{P}^2$, entonces $\mathcal{C}$ es una circunferencia.

(c) Sean C_1,C_2, C_3 circunferencias en $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ tales que $|C_i \cap C_j| = 2$ para $i \neq j$. Probar que las rectas L_{ij} que pasan por los dos puntos de $C_i \cap C_j$ son concurrentes.