Geometría Proyectiva
Segundo Cuatrimestre — 2022

Práctica 7: Geometría axiomática (Opcional)

1. Sea A un plano afín, supongamos que $A \neq \emptyset$. Diremos que $L_1 // L_2$ sii $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ o bien $L_1 = L_2$. Probar:

(a) La relación $L_1 // L_2$ es una relación de equivalencia.
(b) A tiene al menos 4 puntos distintos, de los cuales no hay 3 en una misma recta.
(c) Para todo par de rectas L_1 y L_2 se verifica, $\#L_1 = \#L_2$.
(d) Sea L una recta cualquiera de A. Si A es finito, entonces $\#A = (\#L)^2$.

2. Sea P un plano proyectivo finito con m elementos. Probar que $m = n^2 + n + 1$ donde $n + 1$ es el número de elementos de cualquier recta de P.

3. Sea k un cuerpo. Demostrar que:

(a) Existe una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{P}^n(k)$ y el conjunto de todos los hiperplanos de $\mathbb{P}^n(k)$.
(b) Dado $p \in \mathbb{P}^n(k)$, notemos con p^* al hiperplano correspondiente, y dado H un hiperplano, H^* designa al punto correspondiente. Probar que $p^{**} = p$ y $H^{**} = H$.

4. Sea k un cuerpo finito con q elementos. Hallar la cantidad de:

(a) puntos en $\mathbb{P}^n(k)$;
(b) hiperplanos en $\mathbb{P}^n(k)$;
(c) cónicas en $\mathbb{P}^n(k)$;
(d) r-planos en $\mathbb{P}^n(k)$ para $r = 0, \ldots, n$.

5. Demostrar que si $T \in GL(n+1, k)$, entonces T induce una transformación $\mathbb{P}(T)$ de $\mathbb{P}^n(k)$ en sí mismo. Pruebe que $\mathbb{P}(T)$ es la identidad sii T es una homotecia no nula. Se define el **grupo lineal proyectivo** $PGL(n+1, k)$ como $GL(n+1, k)/k^*$. Demuestre que $PGL(n+1, k)$ actúa efectiva y transitivamente sobre $\mathbb{P}^n(k)$.

6. Decimos que un conjunto $p_1, \ldots, p_{n+2}$ de $n+2$ puntos de $\mathbb{P}^n(k)$ está en posición general si ningún hiperplano contiene $n+1$ de los p_i. Demostrar que dados $p_1, \ldots, p_{n+2}$ y $q_1, \ldots, q_{n+2}$ conjuntos de puntos de $\mathbb{P}^n(k)$ en posición general, existe un único $\sigma \in PGL(n+1, k)$ tal que $\sigma(p_i) = q_i \; \forall i$.

7. Sea $f : V \to W$ una transformación lineal entre k-espacios vectoriales, y sea $\pi : V - \{0\} \to \mathbb{P}V$ la proyección canónica. Probar que f induce una aplicación $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}V - S \to \mathbb{P}W$ donde $S = \pi(\ker(f) - \{0\})$. En particular, para cada subespacio lineal $V' \subset V$, se tiene una aplicación $\mathbb{P}V - S \to \mathbb{P}(V/V')$ donde $S = \pi(V' - \{0\})$ denominada *proyección con centro S*.

8. Completación de un plano afín. Sea $A = (X, L)$ un plano afín. Vamos a construir un plano proyectivo $\mathcal{A} = (\mathcal{X}, \mathcal{L})$ (agregando a A una recta, "la recta del infinito"). Sea Δ el conjunto de las direcciones de A (clases de equivalencia de rectas bajo la relación de paralelismo). Tomamos $\mathcal{X} = X \cup \Delta$ (unión disjunta). Para cada recta $\ell \in L$ denotemos $[\ell] \in \Delta$ la clase de equivalencia de ℓ y definamos $\bar{\ell} = \ell \cup \{[\ell]\} \subset \mathcal{X}$ (agregamos a ℓ el punto $[\ell]$). Definimos $\mathcal{L} = \{\bar{\ell} : \ell \in L\} \cup \{\Delta\}$. Demostrar que $\mathcal{A}$ es un plano proyectivo.

9. Afinización de un plano proyectivo. Sea $P = (X, L)$ un plano proyectivo y sea $m \in L$ una recta. Vamos a construir un plano afín $A_m = (P - m, L_m)$ "quitando a P la recta m". Para cada recta ℓ en P distinta de m sea $\ell_m = \ell - m \subset P - m$. Definimos $L_m = \{\ell_m : \ell \in L, \ell \neq m\}$. Demostrar que A_m es un plano afín. Si n es otra recta en P entonces A_m y A_n son isomorfos ?

(a) Investigar qué sucede al componer las operaciones de los ejercicios 8 y 9.

(b) Sea k un cuerpo y consideremos el plano afín k^2 habitual. Demostrar que la completación de k^2 como en a) es un plano proyectivo isomorfo a $\mathbb{P}^2(k)$.